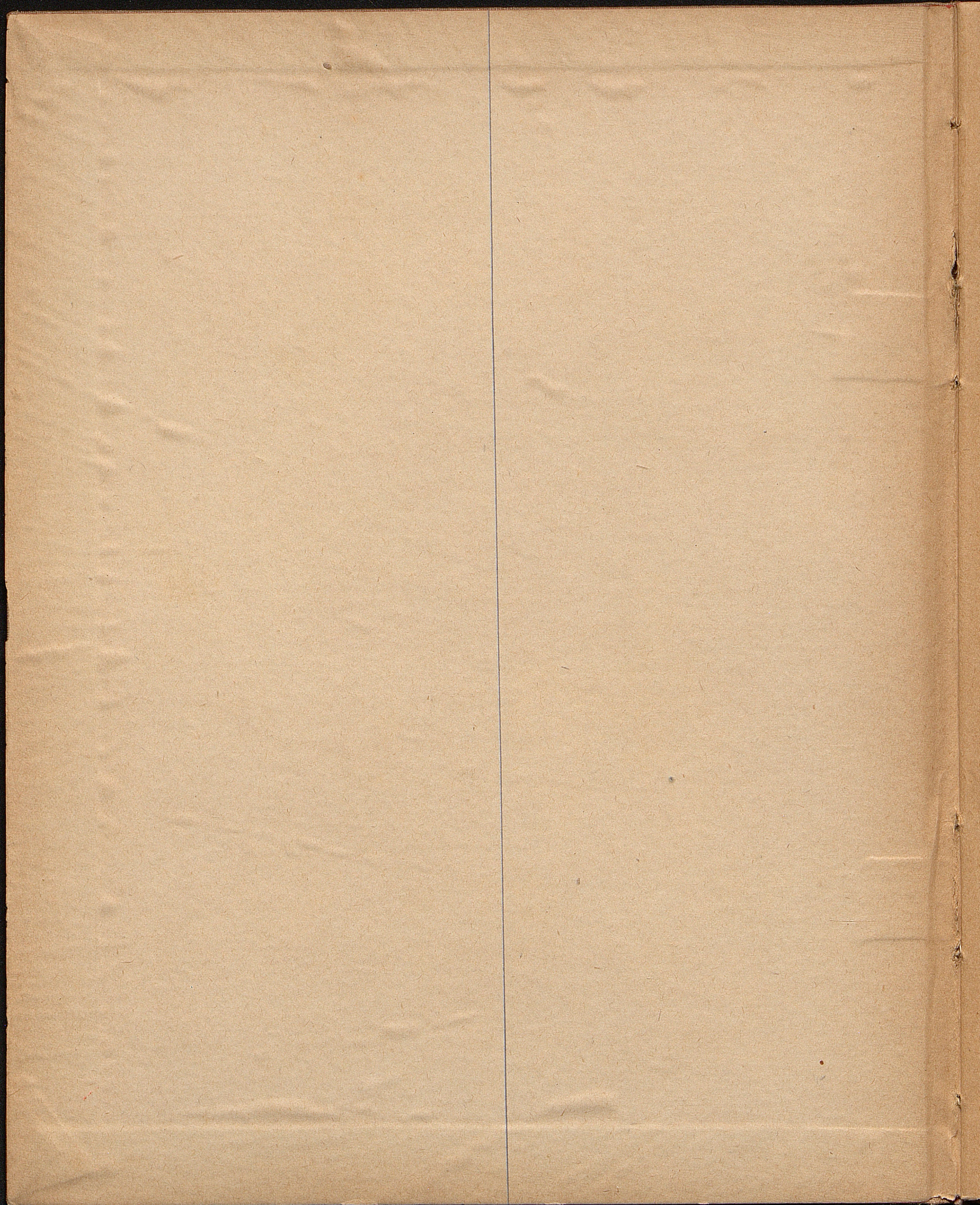

colorchecker CLASSIC
x·rite
mm

Calcul intégral

Cours de M. Picard
à la Faculté des sciences
1891-1892.

3e cahier   Louis Couturat



Cours de Calcul intégral
professé par M. Picard
à la Faculté des sciences
1891-1892.
III.



Table.

Théorie des équations différentielles.

Considérons toujours l'équation différentielle du 1er ordre :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_1 x + b_1 y + \ldots}{ax + by + \ldots}$$

Nous allons l'étudier à un point de vue tout différent, et chercher, d'après M. Poincaré (Journal de Liouville, 188) quelles courbes définit cette équation au voisinage de l'origine. Nous supposons les coefficients réels, et les variables x, y aussi ; les systèmes de valeurs (x, y) qui vérifient cette équation constituent des courbes du plan Oxy ; nous allons chercher celles qui passent par l'origine, c.à.d. qui admettent la solution : $x = 0$, $y = 0$. En d'autres termes chaque intégrale y, étant une fonction de x, est représentée par une certaine courbe du plan des xy ; nous voulons trouver celles de ces intégrales qui s'annulent avec x.

Ramenons d'abord l'équation proposée à la forme canonique par le changement de variables $X = \alpha x + \beta y$ $Y = \gamma x + \delta y$ (voir 2e cahier, page 148.) On doit avoir : $\frac{dY}{dX} = \frac{\lambda_2 Y}{\lambda_1 X}$

d'où les proportions :

$$\alpha(ax+by) + \beta(a_1 x + b_1 y) = \lambda_1(\alpha x + \beta y)$$
$$\gamma(ax+by) + \delta(a_1 x + b_1 y) = \lambda_2(\gamma x + \delta y)$$

λ_1 et λ_2 sont les racines de l'équation : $\begin{vmatrix} a-\lambda & a_1 \\ b_1 & b-\lambda \end{vmatrix} = 0$

Comme nous ne supposons aucune relation entre les coefficients, cette

équation aura ses racines distinctes : on aura : $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \gtrless 1$.
Mais il faut distinguer le cas où elles sont réelles et le cas où elles sont imaginaires. L'équation étant : $\lambda^2 - (a+b_1)\lambda + ab_1 - a_1 b = 0$
Son discriminant est : $(a+b_1)^2 - 4(ab_1 - a_1 b)$

— 1° $(a+b_1)^2 - 4(ab_1 - a_1 b) > 0$

Les racines $\lambda_1\ \lambda_2$ sont réelles, et les ~~rapports~~ coefficients $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ qu'on tire des équations : $\alpha(a-\lambda) + \beta a_1 = 0 \qquad \alpha b + \beta(b_1 - \lambda) = 0$
seront aussi réels ; on aura donc par une transformation réelle la nouvelle équation :

$$\frac{dY}{dX} = \frac{\lambda_2 Y + \dots}{\lambda_1 X + \dots}$$

Il y a 2 cas très différents à distinguer suivant que le rapport (réel) $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ est positif ou négatif.

Supposons : $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} > 0$; on sait que l'intégrale générale a la forme (2e cahier, page 144) : $u_2^{\lambda_1}(X, Y) = C u_1^{\lambda_2}(X, Y)$
On peut toujours supposer λ_1, λ_2 positifs. L'équation précédente représente une courbe qui passe par l'origine ; en faisant varier C, on a une famille de courbes qui représentent toutes les intégrales qui s'annulent avec X, ces courbes se répartissent en 2 faisceaux tangents à 2 droites en O. L'origine s'appelle alors un noeud.

Supposons : $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} < 0$ On posera : $Y = tX$,
et on aura : $t + X\frac{dt}{dX} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} t + \dots \qquad X\frac{dt}{dX} = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} - 1\right)t + \dots$

Cette équation n'admet qu'une seule intégrale t s'annulant avec X ; cette intégrale est représentée par une courbe qui passe par l'origine (cf. 2e cahier, page 147)

et est tangente à l'axe des x, puisque son coefficient angulaire t est nul.
Posons ensuite: $X = \theta Y$. La racine $t = \infty$ devient: $\theta = 0$; on a une nouvelle intégrale θ s'annulant avec et représentée par une courbe tangente en O à l'axe des y, puisque son coefficient angulaire est infini. Il y a donc 2 courbes intégrales qui passent par O et s'y coupent à angle droit; l'origine s'appelle alors un col.

— 2° $(a+b_1)^2 - 4(ab_1 - a_1b) < 0$

Les racines $\lambda_1 \lambda_2$ étant imaginaires, la courbe n'a aucune tangente déterminée au point: $x = 0$, $y = 0$.
En effet, on a une équation du 2e degré en t:

$$\frac{a_1 + b_1 t}{a + bt} - t = 0 \quad \text{ou} \quad bt^2 + (a - b_1)t - a_1 = 0$$

qui donne les coefficients angulaires des tangentes en O. Or elle a même discriminant que l'équation en λ:

$$(a+b_1)^2 - 4(ab_1 - a_1b) = (a-b_1)^2 + 4a_1b$$

donc les valeurs de t sont imaginaires comme celles de λ.
L'origine est donc un point asymptotique pour les courbes intégrales; il y en a d'ailleurs une infinité. L'origine s'appelle un foyer.
— Les 2 racines $\lambda_1 \lambda_2$ étant imaginaires conjuguées, les coefficients α et γ, β et δ sont aussi des imaginaires conjuguées. Donc X, Y aussi sont imaginaires conjugués (x, y étant réelles).
Si l'on ramène l'équation à la forme canonique, les fonctions

u_1 u_2 elles-mêmes seront imaginaires conjuguées, de la forme :

$$f(X,Y) + i\varphi(X,Y) \qquad f(X,Y) - i\varphi(X,Y)$$

f et φ étant des fonctions réelles holomorphes s'annulant pour $X=0$, $Y=0$. D'autre part, posons :

$\lambda_1 = p - qi \qquad \lambda_2 = p + qi \qquad$ p et q constantes réelles.

L'intégrale générale sera :

$$\frac{(f+i\varphi)^{p+qi}}{(f-i\varphi)^{p-qi}} = C_1$$

Telle est l'équation des courbes intégrales ; on en obtient une infinité en faisant varier C_1. Nous allons déterminer leur forme générale. Prenons les logarithmes de cette équation :

$$(p+qi)\log(f+i\varphi) - (p-qi)\log(f-i\varphi) = Ci$$

C étant une constante réelle, car la différence de 2 imaginaires conjuguées est purement imaginaire. Faisons la transformation :

$$f(XY) = \xi \qquad \varphi(XY) = \eta$$

et supposons que le déterminant fonctionnel ne soit pas nul ; la courbe en (X,Y) se transformera en une courbe en (ξ, η). Cette transformée a une forme très simple :

$$(p+qi)\log(\xi+i\eta) - (p-qi)\log(\xi-i\eta) = Ci$$

En coordonnées polaires, posons : $\xi = \rho\cos\theta \qquad \eta = \rho\sin\theta$

$$(p+qi)(\log\rho + i\theta) - (p-qi)(\log\rho - i\theta) = Ci$$

d'où l'on tire :

$$2q\log\rho + 2p\theta = C$$

équation d'une courbe réelle, qui est une spirale logarithmique :

$$\log\rho = -\frac{p\theta}{q} + C \qquad \rho = Ce^{-\frac{p}{q}\theta}$$

La transformée étant une spirale logarithmique, la courbe primitive est aussi une spirale, plus compliquée. On a donc une infinité de courbes intégrales de forme spirale, qui ont le point O pour point asymptotique et décrivent une infinité de spires autour de l'origine.

Exemple (l'origine foyer) : $\dfrac{dx}{x-y} = \dfrac{dy}{x+y}$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+y}{x-y}$ Équation en λ : $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$(1-\lambda)^2 + 1 = 0 \qquad \lambda = 1 \pm i.$

$\dfrac{\gamma}{\delta} = \dfrac{1}{i} \qquad \dfrac{\alpha}{\beta} = -\dfrac{1}{i} \qquad X = x - iy \qquad Y = x + iy$

$$\frac{dY}{dX} = \frac{dx+idy}{dx-idy} = \frac{x-y+i(x+y)}{x-y-i(x+y)} = \frac{x+iy+i(x+iy)}{x-iy-i(x-iy)} = \frac{1+i}{1-i}\cdot\frac{Y}{X}$$

En faisant, dans la transformation précédente, $p=1$, $q=-1$, on trouve pour la transformée : $\rho = Ce^{\theta}$.

Exemple (l'origine col) : $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y}{x}$ $\qquad xy = C$

est l'intégrale générale : elle représente 2 hyperboles équilatères ayant pour asymptotes les axes. Il y a 2 courbes intégrales qui passent par O ; on les obtient en faisant $C = 0$: $\quad x = 0, \quad y = 0$

Ce sont les 2 axes eux-mêmes.

Il peut arriver, dans certains cas particuliers, qu'un point du plan ne soit ni nœud, ni col, ni foyer — Par exemple, si λ_1 et λ_2 sont imaginaires, mais que leur rapport soit réel, le point ne sera pas en général un foyer — On a nécessairement dans ce cas :

$\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} = -1$, puisque λ_1, λ_2 sont imaginaires conjuguées.

On ne peut plus poser l'intégrale générale: $u_2^{\lambda_1} = C u_1^{\lambda_2}$

car $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ est négatif (cf. 2e cahier, page 144) — Exemple:

$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ Pour ramener à la forme canonique, il faut changer de variables; l'équation en λ est: $\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$

$\lambda^2 + 1 = 0$ $\lambda_1 = +i$ $\lambda_2 = -i$

On trouve bien: $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = -1$ $\frac{dY}{dX} = -\frac{Y}{X}$.

Intégrons directement l'équation proposée:

$$x^2 + y^2 = C$$

Les courbes intégrales sont donc des cercles et plus généralement des courbes fermées s'enveloppant les unes les autres et entourant l'origine sans y passer (sauf pour $C=0$, la courbe se réduit alors à O). — L'origine s'appelle alors centre.

— Ainsi l'équation: $\frac{dy}{dx} = \frac{Y}{X}$ (X, Y polynômes en x, y)

définit un réseau de courbes intégrales (y en fonction de x) Pour savoir comment elles se comportent dans toute l'étendue du plan, il faut d'abord connaître leurs singularités. Elles ont d'abord pour points singuliers ceux qui annulent à la fois X et Y; on sait en général si ce sont des noeuds, des cols, des foyers ou des centres, et par suite on connaît l'allure des courbes au voisinage de ces points. Mais ces courbes admettent d'autres singularités dont on ne peut se rendre compte au moyen de l'équation différentielle. Ce qui complique surtout cette étude, c'est que les courbes intégrales ont, en général, des courbes asymptotiques (cycles limites) dont elles s'approchent indéfiniment par une infinité de spires, et qu'on ne peut pas toujours déterminer.

cela dépend des cas particuliers qu'on étudie.

On peut étudier a priori les cycles limites en les créant arbitrairement: un foyer est un cercle limite infiniment petit; si l'on fait une transformation bi-rationnelle, pour laquelle le foyer soit un point d'indétermination, il sera transformé en une certaine courbe fermée d'indétermination; ce sera un cycle limite.

Solutions singulières.

Soit l'équation différentielle: $f(x, y, y') = 0$

et supposons qu'il y ait une relation entre x, y, représentée géométriqt par une courbe plane. A chaque système de valeurs de x, y vérifiant cette relation correspond une ou plusieurs valeurs de y' définie par l'équation différentielle: ce sera le coefficient angulaire de la tangente à la courbe au point considéré (x_0, y_0) - Supposons que y' soit une racine simple; elle sera fonction holomorphe de x, y dans le voisinage du point (x_0, y_0); on aura donc: $y' = F(x, y)$

et il suffira d'appliquer le théorème fondamental à cette équation différentielle explicite pour obtenir l'intégrale y qui passe par le point $x_0 y_0$, c.à.d. pour avoir la courbe intégrale au voisinage de ce point.

Il se peut que y' soit racine multiple en certains points; il se peut même qu'elle soit racine multiple pour tous les points d'une courbe. On ne pourra plus tirer y' de l'équation en fonction holomorphe de x, y, ni par conséquent appliquer le théorème fondamental pour connaître l'intégrale. On appelle solution singulière de l'équation différentielle une intégrale telle que y' ne soit fonction holomorphe

de x, y en aucun point de la courbe qui représente cette intégrale.
Il est facile d'obtenir les solutions singulières; puisque par définition on doit avoir : $\frac{\partial f}{\partial y'} = 0$ (y' racine multiple)
en éliminant y' entre cette équation et l'équation différentielle, on trouve une équation finie : $Q(x,y) = 0$
d'où l'on tirera la ou les solutions singulières y en fonction de x.
Donc, si les solutions singulières existent, elles s'obtiennent algébriquement.

Il faut bien remarquer que la relation : $Q(x,y) = 0$
ne contient pas nécessairement une solution de l'équation différentielle : on sait seulement que s'il existe une solution singulière, elle vérifie cette équation. Comme il n'y a pas de raison pour qu'une équation $Q(x,y) = 0$ définisse une fonction implicite y de x qui vérifie l'équation différentielle proposée, on peut dire qu'en général il n'y a pas de solution singulière. Soit par exemple l'équation explicite en y' :

$$y'^2 = P(x,y)$$

L'équation dérivée est : $y' = 0$
et l'équation résultante : $P(x,y) = 0$

La fonction P étant absolument quelconque, il n'y a pas de raisons pour que les fonctions y qui vérifient cette équation soient des solutions de l'équation différentielle donnée. Supposons par exemple qu'on ait : $P(x,y) = Ax + By + C$ A, B, C fonctions de x.
La solution de l'équation : $Ax + By + C = 0$ $y' = -\frac{A}{B}$
ne vérifie pas l'équation : $y'^2 = Ax + By + C$
car celle-ci devient : $\frac{A^2}{B^2} = 0$ ce qui est absurde.

Dans tous les cas, on a toujours une courbe représentant l'équation :

$$Q(x,y) = 0$$

Considérons un de ses points (α, β), et cherchons quelles sont les intégrales qui passent par ce point. D'après la définition même de la courbe, on a en général une racine double (au moins) pour y' quand on substitue α, β à x, y dans l'équation différentielle. On a donc au voisinage du point (α, β) 2 valeurs de y' distinctes, puisque la courbe : $Q(x,y) = 0$ est le lieu des points où y' est une racine double. Ces 2 valeurs sont racines d'une équation du 2e degré dont les coefficients sont fonctions holomorphes de x, y au voisinage du point (α, β) ; on peut donc substituer à l'équation différentielle la suivante :

$$y' = A(x,y) \pm \sqrt{B(x,y)}$$

La courbe $Q(x,y) = 0$ est remplacée, au voisinage du point (α, β) par la courbe dont l'équation est : $B(x,y) = 0$ et qui passe aussi par le p. (α, β) de sorte qu'on a : $B(\alpha, \beta) = 0$.
La valeur correspondante de y' est la racine double : $A(\alpha, \beta)$
Or cette valeur doit être différente de celle du coefficient angulaire de la tangente à la courbe $B = 0$ (ou $Q = 0$) car autrement la fonction implicite y de x définie par l'équation : $B(x,y) = 0$ serait une solution singulière, et nous supposons qu'il n'y a pas de solution singulière.

Prenons pour origine le point que nous avons appelé (α, β) ; on aura :

$$A(x,y) = A + \alpha x + \beta y + \ldots\ldots$$

$$B(x,y) = ax + by + \ldots\ldots \qquad \text{car} \quad B(0,0) = 0.$$

Supposons : $A \gtrless -\dfrac{a}{b}$ ou : $a + bA \gtrless 0$.

et cherchons, dans cette hypothèse, quelles sont les courbes intégrales qui passent par l'origine ($x=0$, $y=0$).

Posons: $x = x'^2$; $y = \lambda x'^2$; l'équation en y' ~~devient~~ était

$$\frac{dy}{dx} = A(x,y) + \sqrt{B(x,y)}$$

elle devient:

$$\frac{x'^2 d\lambda + 2\lambda x' dx'}{2x' dx'} = \frac{x' d\lambda}{2dx'} + \lambda = A + x'^2(\alpha+\beta\lambda) + \ldots + x'\sqrt{a + b\lambda + x'^2(\ldots)}$$

ou

$$\frac{x' d\lambda}{dx'} = -2(\lambda - A) + 2x'^2(\alpha+\beta\lambda) + \ldots + x'\sqrt{a+b\lambda+x'^2(\ldots)}$$

Le 2e membre s'annule pour $x'=0$, $\lambda = A$; et il ne peut pas y avoir d'autre valeur de λ qui annule ce 2e membre pour $x'=0$. On a donc en vertu d'un théorème établi précédemment (2e cahier, page 133) une seule intégrale, qui est holomorphe ($b=-2<0$), à la condition que le 2e membre soit holomorphe; or la quantité sous le radical ne s'annule pas pour $x'=0$, $\lambda = A$, car on a supposé:

$a + bA \gtrless 0$ (ce qui revient à supposer qu'il n'y a pas de solution singulière)

On a donc l'intégrale λ de la forme suivante:

$$\lambda = A + px' + qx'^2 + \ldots\ldots$$

se réduisant à A pour $x'=0$. On a par suite l'intégrale:

$$y = \lambda x = x\left(A + px^{\frac{1}{2}} + qx + \ldots\ldots\right)$$

fonction ayant 2 déterminations distinctes sauf à l'origine $\left\{\begin{matrix} x=0 \\ y=0 \end{matrix}\right.$ puisqu'elle est développée suivant les puissances de $\sqrt{x}$.

Telle est la forme de la courbe intégrale qui passe par le point (α, β) pris provisoirement pour origine; elle a un rebroussement en ce point (2 branches ayant un point commun et une tangente commune) — Ainsi la courbe $Q(x,y)=0$ est le lieu des points de rebroussement

des courbes intégrales (démonstration de M. Darboux, Bulletin..... 187)

– Etudions maintenant le cas où il y a des solutions singulières.

Supposons que la solution de l'équation : $Q(x,y) = 0$

vérifie l'équation différentielle, c.à.d. que la fonction y de x définie par cette équation dans le voisinage du point (α,β) de cette courbe satisfait l'équation équivalente : $\frac{dy}{dx} = A(x,y)$

qui exprime que y' est une racine double sur la courbe $Q = 0$.

Dans ce cas, on a : $a + bA = 0$

car le coefficient angulaire pour chaque point de la courbe pris pour origine est : $\frac{dy}{dx} = A$

et d'autre part, la courbe $Q = 0$ est représentée dans le voisinage du p. $(x=0, y=0)$ par l'équation : $B(x,y) = 0$

et son coefficient angulaire est par suite : $\frac{dy}{dx} = -\frac{a}{b}$.

– Soit y_1 la solution singulière ; on a identiquement :

$$B(x, y_1) = 0 \qquad \frac{dy_1}{dx} = A(x,y_1) \quad (y' \text{ racine double})$$

Posons : $y = y_1 + z$ z est la nouvelle fonction inconnue ; l'équation différentielle devient :

$$\frac{dy_1}{dx} + \frac{dz}{dx} = A(x, y_1+z) + \sqrt{B(x, y_1+z)} \qquad \text{ou :}$$

$$\frac{dz}{dx} = z\varphi_1(x) + z^2\varphi_2(x) + \ldots\ldots + \sqrt{z\psi_1(x) + z^2\psi_2(x) + \ldots\ldots}$$

$\varphi_1 \varphi_2 \ldots\ldots \psi_1 \psi_2 \ldots\ldots$ étant des fonctions holomorphes en x.

En général, $\psi_1(x)$ ne sera pas identiquement nul ; l'origine étant un point arbitraire de la courbe, supposons : $\psi_1(0) \gtrless 0$.

Cherchons quelles sont les intégrales de cette équation différentielle en z qui s'annulent pour $x=0$, c.à.d. qui passent par le point choisi sur la courbe : $Q=0$.

Il y a d'abord la solution évidente : z identiquement nul, qui donne l'intégrale y_1 connue. Pour savoir s'il y en a une autre, posons : $z = z'^2$; l'équation devient (en divisant par z') :

$$2\frac{dz'}{dx} = z'\varphi_1(x) + z'^3 + \ldots\ldots + \sqrt{\psi_1(x) + z'^2\psi_2(x) + \ldots}$$

Le 2e membre est holomorphe au voisinage de $x=0$, $z'=0$, car pour $x=0$, la quantité soumise au radical ne s'annule pas, puisque par hypothèse : $\psi_1(0) \gtrless 0$.

On a donc une intégrale z' ; ce sont 2 solutions égales et de signes contraires, car la quantité soumise au radical étant paire et la partie rationnelle impaire, changer le signe du radical équivaut à changer le signe de z'. D'ailleurs z' s'annulant avec x n'aura pas de terme indépendant de x. On aura donc l'intégrale cherchée : $y = y_1 + z'^2$, le développement de z'^2 commençant par un terme en x^2.

On obtient ainsi une autre solution que la solution singulière y_1, mais elle est liée à elle par une relation remarquable ; les 2 courbes intégrales ont même tangente au point commun ($x=0, y=0$) puisque leurs ordonnées (y, y_1) ne diffèrent que par un terme du 2e degré en x. — Ainsi la courbe $Q=0$ qui représente la solution singulière est tangente en tous ses points à une solution ordinaire ; c'est donc l'enveloppe des courbes intégrales de l'équation différentielle

En général, c.à.d. quand $\varphi_1(x)$ n'est pas identiquement nul, la solution singulière définie par l'équation : $Q(x,y) = 0$ ne rentre pas dans l'intégrale générale.

Mais si : $\varphi_1(x) = 0$ identiquement, il n'y a pas d'autre intégrale passant par le point (α, β) que la solution singulière $z = 0$: en effet l'équation différentielle prend la forme :

$$\frac{dz}{dx} = z\varphi_1(x) + z^3\varphi_2(x) + \ldots + z\sqrt{\psi_2(x) + z^2(\ldots\ldots)}$$

Le 2e membre est holomorphe au voisinage de $x = 0$, $z = 0$, si $\psi_2(x)$ n'est pas identiquement nul ; on a donc l'équation :

$$\frac{dz}{dx} = z\,F(z,x) \qquad (F \text{ holomorphe})$$

Or on sait (v. 2e cahier, pp. 103, 104) que ce type d'équation n'admet pas d'autre intégrale que : $z = 0$ identiquement.

Donc, dans ce cas, la solution singulière est la seule solution. La solution générale se confond avec la solution singulière, donc celle-ci rentre dans l'intégrale générale ; elle correspond à une certaine valeur de la constante arbitraire.

<u>Exemples</u>. — Soit l'équation : $\frac{dy}{dx} = y + y\sqrt{1+y}$

qu'on pourrait intégrer par quadrature. Prenons les valeurs de y pour lesquelles les 2 racines sont égales : $y = 0$, $y = -1$.

La solution singulière : $y = 0$, rentre dans l'intégrale générale ; l'autre solution : $y = -1$ n'est pas une solution de l'équation différentielle. Donc cette ligne (droite parallèle à Ox) sera le lieu des points de rebroussement des courbes intégrales.

— Soit l'équation : $y - 2x \frac{dy}{dx} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$
du 2e degré ; a ses racines égales pour : $x^2 + y = 0$ $[Q=0]$
Cette valeur de y n'est pas une solution de l'équation ; donc la courbe $Q=0$ est le lieu des points de rebroussement des courbes intégrales.

— Soit l'équation : $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2x \frac{dy}{dx} + 2y = 0$
Elle a ses racines égales pour : $x^2 - 2y = 0$, $y = \frac{x^2}{2}$. $[Q=0]$
Cette valeur de y est une solution de l'équation ; c'est une solution singulière qui ne rentre pas dans l'intégrale générale, car :

$\frac{dy}{dx} = x + \sqrt{x^2 - 2y}$ Posons : $y_1 = \frac{x^2}{2}$ $y = y_1 + z$

$\frac{dy_1}{dx} + \frac{dz}{dx} = x + \sqrt{x^2 - 2y_1 - 2z}$ $\frac{dz}{dx} = \sqrt{-2z}$ $(\psi_1 = -2)$

L'origine de la théorie des solutions singulières a été la considération des courbes enveloppes, qui se présente seulement dans nos conclusions. On raisonnait ainsi : l'équation : $f(x, y, y') = 0$
admet une intégrale générale : $F(x, y, C) = 0$
avec une constante arbitraire. Elle définit géométriquement une famille de courbes dépendant d'un paramètre arbitraire. De telles courbes ont en général une enveloppe, et cette enveloppe doit satisfaire l'équation différentielle : en effet, en chacun de ses points elle est tangente à une enveloppée, donc x, y, y' sont les mêmes sur l'enveloppe et sur l'enveloppée. L'enveloppe est donc une solution singulière de l'équation différentielle.
Cette façon de poser et de traiter la question engendrait certains paradoxes : en admettant qu'une famille de courbes ayant en général une enveloppe, une équation différentielle avait <u>en général</u> une

solution singulière. Nous avons vu, en concevant autrement le problème, qu'bien au contraire une équation différentielle n'a pas, en général, de solution singulière.

Et en effet les conclusions ~~ou~~ présomptions fondées sur la géométrie étaient téméraires et excessives : on ne sait rien, à priori ~~en général~~, de la famille de courbes définies par l'intégrale : $F(x, y, C) = 0$
et l'on ne peut affirmer qu'elles aient une véritable enveloppe ; aussi avons-nous vu que dans le cas général la courbe $Q = 0$ est le lieu de leurs points singuliers.

Si au contraire on définit une famille de courbes par l'équation finie : $F(x, y, C) = 0$ et qu'on forme ensuite leur équation différentielle en éliminant le paramètre C, il est tout naturel que les courbes intégrales de cette équation aient une enveloppe, c.à.d. que l'équation elle-même ait une solution singulière. Il y a, selon la remarque faite par Clebsch, qui a donné l'explication définitive de ces paradoxes, deux manières de définir les courbes d'une famille (soit par leur équation différentielle, soit par leur équation en termes finis avec un paramètre arbitraire), de même qu'on peut définir une courbe plane, soit en coordonnées ponctuelles, soit en coordonnées tangentielles ; il y a d'ailleurs une grande analogie entre ces deux distinctions parallèles. Il semble étrange que les courbes intégrales d'une équation différentielle quelconque n'aient pas d'enveloppe ; mais cela n'est pas plus étonnant que de voir des courbes en coordonnées tangentielles avoir des points singuliers.

Considérons le type d'équation différentielle élémentaire :

$$\frac{dy}{dx} = Ay^2 + By + C \qquad A, B, C \text{ fonctions de } x.$$

On l'a déjà rencontré (2e cahier, pages 112, 130) en se proposant de résoudre ce problème général : trouver une équation différentielle de la forme : $\frac{dy}{dx} = R(y, x)$ R étant une fonction rationnelle de y telle que les points singuliers des intégrales de cette équation soient fixes. On sait que pour cela R doit se réduire à un trinôme du 2e degré : $Ay^2 + By + C$

On obtient ainsi l'équation de Riccati, qui se rencontre très fréquemment dans la pratique.

On peut se rendre compte a priori de la forme sous laquelle la constante figure dans l'intégrale générale de cette équation. On sait qu'il y a un certain nombre de points singuliers fixes dans le plan. On peut donc se rendre de x_0 en x par un certain chemin qui ne passe par aucun point singulier. On se donne en x_0 la valeur initiale y_0, on trouve en x une valeur déterminée y, qui dépend d'une certaine manière de y_0 — y est une fonction analytique de y_0, car on a au voisinage de y_0 une intégrale développable en série, et l'on peut prolonger cette fonction de proche en proche par des cercles successifs le long de la courbe (x_0, x) sans jamais être arrêté, quelle que soit sa longueur. C'est de plus une fonction uniforme pour toute valeur de y_0, même pour $y_0 = \infty$. C'est donc une fonction rationnelle de y_0 ; y ne peut avoir que des pôles. Mais on peut renverser la proposition : y_0 dépend réciproquement de y, et de la même manière ; donc y_0 est fonction rationnelle de y. Puisque la relation entre

y et y_0 est rationnelle dans les 2 sens (fonction directe et inverse) elle ne peut être que de la forme : $y = \dfrac{Py_0 + Q}{Ry_0 + S}$

P, Q, R, S étant fonctions de x.

Telle est la forme sous laquelle la constante y_0 entre dans l'intégrale générale de l'équation de Riccati.

L'intégration de cette équation ne peut pas en général s'effectuer au moyen des symboles élémentaires. Mais si : $A = 0$, on est ramené à une équation linéaire : $\dfrac{dy}{dx} = By + C$ qu'il est facile d'intégrer.

Posons : $y = uv$ $\quad u, v$ fonctions arbitraires.

$$u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} = Buv + C$$

Choisissons v de manière à faire disparaître le terme en B :

$$\frac{dv}{dx} = Bv \qquad \frac{dv}{v} = Bdx \qquad \log v = \int Bdx \qquad v = e^{\int Bdx}$$

Nous n'ajoutons pas de constante, parce que v est une fonction auxiliaire dont nous pouvons choisir une détermination arbitraire.

L'équation se réduit à : $v\dfrac{du}{dx} = C$

$$\frac{du}{dx} = \frac{C}{v} \qquad u = \int \frac{C}{v}dx = \int Ce^{-\int Bdx}dx$$

On ajoutera ici une constante arbitraire, qui figurera linéairement dans y, mais elle n'entrera pas au dénominateur, car y ne peut pas devenir infini quand on annule cette constante. Posons $y = \dfrac{1}{z}$, pour transformer l'infini de y en zéro de z. On aura pour un point ordinaire x de B et de C : $-\dfrac{dz}{dx} = Bz + Cz^2$

z étant facteur dans le 2e membre cette équation a pour unique

solution : z identiquement nul, ou $y = \infty$. (2e cahier, page 103)
On pouvait d'ailleurs prévoir que la constante y_0 ne figurerait pas au dénominateur.

— Théorie du facteur intégrant —

Mettons l'équation linéaire sous la forme : $\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y}$
X et Y étant des fonctions de x, y.
Supposons que l'intégrale générale soit : $f(x, y) = C$
Différentions : $\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0$
d'où, à cause de l'éq. linéaire : $X \frac{\partial f}{\partial x} + Y \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ (1)
Si le 1er membre de l'équation linéaire, mise sous la forme

$$Y dx - X dy = 0$$

est une différentielle totale exacte : df_1,
l'équation (1) signifie que le déterminant fonctionnel de f et f_1 est nul, c.à.d. que f est fonction de f_1 ; l'équation linéaire sera immédiatement intégrée, et son intégrale générale sera :

$$f_1(x, y) = C^{te}$$

Si le 1er membre n'est pas différentielle exacte, l'équation (1) donne :

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{Y} = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{-X} = \mu$$

μ étant une fonction de x, y, et non un facteur constant comme dans le cas précédent. On en tire : $\frac{\partial f}{\partial x} = \mu Y \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\mu X$
d'où : $\mu(Y dx - X dy) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = df$.
Ainsi ce facteur μ rend le 1er membre de l'équation linéaire

différentielle totale exacte. La recherche de ce facteur intégrant équivaut à celle de l'intégrale générale, qui s'en déduit directement. D'ailleurs, il peut y avoir une infinité de facteurs intégrants : soit μ_1 un second ; on a :

$$\mu_1 (Y dx - X dy) = df_1$$

d'où :

$$\frac{df_1}{df} = \frac{\mu_1}{\mu} \qquad \frac{\frac{\partial f_1}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{\frac{\partial f_1}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{\mu_1}{\mu}$$

f_1 est fonction de f, puisque leur déterminant fonctionnel est nul. On a donc, en appelant φ cette fonction :

$$\varphi'(f) = \frac{\mu_1}{\mu}$$

ou

$$\mu_1 = \mu\, \varphi'(f)$$

La fonction φ étant arbitraire, on voit qu'on peut obtenir un facteur intégrant quelconque en multipliant le 1er trouvé par une fonction quelconque de f. — f étant la fonction dont le 1er membre est la différentielle totale exacte, l'équation linéaire a pour intégrale générale

$$f(x, y) = C$$

Nous allons traiter le cas où X, Y sont des fonctions homogènes du même degré en x et y. Le facteur intégrant est facile à trouver.

Posons : $\frac{y}{x} = t$. L'équation linéaire devient : Soit n le degré :

$$Y(x, tx)\,dx - X(x, tx)\,dy = 0$$

$$x^n Y(1,t)\,dx - x^n X(1,t)\,t\,dx - x^{n+1} X(1,t)\,dt = 0$$

$$x^n \left[Y(1,t) - tX(1,t)\right] dx = x^{n+1} X(1,t)\,dt$$

Divisons par $x^{n+1}\left[Y(1,t) - tX(1,t)\right]$:

$$\frac{dx}{x} = \frac{X(1,t)}{Y(1,t) - tX(1,t)}\,dt$$

Les variables sont séparées. On voit, en revenant aux anciennes variables, que le facteur intégrant est : $\dfrac{1}{xY - yX}$

Nous allons exposer, pour les appliquer aux équations du 1er ordre, les principes de la théorie des groupes de transformations, d'après les recherches de M. Sophus Lie sur les transformations infinitésimales des équations.

Considérons n variables : $x_1 \, x_2 \, \ldots\ldots \, x_n$
et n équations de transformation :

$$x'_1 = f_1(x_1 \, x_2 \ldots x_n \; a_1 \, a_2 \ldots a_r)$$
$$x'_2 = f_2(x_1 \, x_2 \ldots x_n \; a_1 \, a_2 \ldots a_r)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x'_n = f_n(x_1 \, x_2 \ldots x_n \; a_1 \, a_2 \ldots a_r)$$

contenant r paramètres arbitraires $a_1 \, a_2 \ldots a_r$. A chaque système de valeurs attribuées à ces paramètres correspond une transformation, de sorte que le système des n équations précédentes définit une infinité de transformations. On dit que toutes ces transformations forment un groupe, si en faisant subir aux n variables successivement 2 transformations quelconques de cet ensemble on obtient une transformation appartenant encore à cet ensemble.

Supposons effectuée la transformation indiquée ci-dessus avec des valeurs déterminées assignées aux paramètres ; puis effectuons sur les nouvelles variables : $x'_1 \, x'_2 \ldots\ldots x'_n$
une nouvelle transformation avec de nouvelles valeurs des paramètres :

$$x''_1 = f_1(x'_1\, x'_2 \ldots\ldots x'_n\, b_1\, b_2 \ldots\ldots b_r)$$
$$x''_2 = f_2(x'_1\, x'_2 \ldots\ldots x'_n\, b_1\, b_2 \ldots\ldots b_r)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x''_n = f_n(x'_1\, x'_2 \ldots\ldots x'_n\, b_1\, b_2 \ldots\ldots b_r)$$

On aura un groupe de transformations, si, en remplaçant dans ces nouvelles équations $x'_1\, x'_2 \ldots\ldots x'_n$ par leurs expressions en fonction de $x_1\, x_2 \ldots\ldots x_n\, a_1\, a_2 \ldots\ldots a_r$, on trouve des équations de même forme :

$$x''_1 = f_1(x_1\, x_2 \ldots\ldots x_n\, c_1\, c_2 \ldots\ldots c_r)$$
$$x''_2 = f_2(x_1\, x_2 \ldots\ldots x_n\, c_1\, c_2 \ldots\ldots c_r)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x''_n = f_n(x_1\, x_2 \ldots\ldots x_n\, c_1\, c_2 \ldots\ldots c_r)$$

où les valeurs $\underline{c}$ des paramètres dépendent uniquement des valeurs $\underline{a}$ et $\underline{b}$; c'est à dire une transformation du même type.

Cherchons à quelles conditions on a un groupe dans le cas le plus simple où : $r = 1$. Soit $\underline{a}$ le paramètre unique ; pour simplifier, nous ne prendrons que 2 variables x, y, mais les raisonnements suivants s'appliquent à toute transformation à 1 paramètre. — Faisons 2 transformations consécutives :

$$x' = f(x, y, a) \qquad x'' = f(x', y', b)$$
$$y' = \varphi(x, y, a) \qquad y'' = \varphi(x', y', b)$$

Pour qu'il y ait un groupe, il faut qu'on ait aussi :

$$x'' = f(x, y, c) \qquad c \text{ étant une fonction } \psi(a, b)$$
$$y'' = \varphi(x, y, c)$$

Supposons que parmi les transformations du type proposé se trouve la substitution identique, c.à.d que pour une certaine valeur a_0 du paramètre on ait identiquement :

$f(x,y,a_0) = x \qquad \varphi(x,y,a_0) = y \qquad$ c.à.d. $\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$

Cela posé, si l'on a un groupe, on doit avoir les 2 identités suivantes :

$$f(x',y',b) = f(x,y,c) \qquad \varphi(x',y',b) = \varphi(x,y,c)$$

Les 3 valeurs, a, b, c étant liées par la relation : $c = \psi(a,b)$

supposons que a et c sont les variables indépendantes. Différentions les 2 identités précédentes par rapport à a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x'}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y'}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial a} = 0 \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial x'}{\partial a} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial y'}{\partial a} + \frac{\partial \varphi}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial a} = 0.$$

$\frac{\partial b}{\partial a}$ est connu ; on peut le calculer en différentiant la relation $c = \psi$:

$$0 = \frac{\partial \psi}{\partial a} + \frac{\partial \psi}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial a}$$

Le déterminant fonctionnel des 2 équations précédentes n'est pas nul, car on suppose f et φ indépendantes ; on peut donc les résoudre par rapport à $\frac{\partial x'}{\partial a}$, $\frac{\partial y'}{\partial a}$, et on en tire :

$$\frac{\partial x'}{\partial a} = \frac{\partial b}{\partial a} F(x'y'b) \qquad \frac{\partial y'}{\partial a} = \frac{\partial b}{\partial a} \Phi(x'y'b)$$

Or $\frac{\partial b}{\partial a}$ est fonction de a et b :

$$\frac{\partial x'}{\partial a} = \lambda(a,b) F(x'y'b) \qquad \frac{\partial y'}{\partial a} = \lambda(a,b) \Phi(x'y'b)$$

Ces identités doivent avoir lieu quels que soient a et c, par suite quels que soient a et b : c ne figurant pas dans ces équations, on peut y considérer a et b comme variables indépendantes.

Donnons à b une valeur constante b_0 ; il reste :

$$\frac{dx'}{da} = \lambda(a)\,\xi(x'y') \qquad \frac{dy'}{da} = \lambda(a)\,\eta(x'y')$$

x', y' considérés comme fonctions de <u>a</u> doivent satisfaire à 2 équations différentielles de cette forme.

Changeons de paramètre, et posons : $\lambda(a)\,da = dt$

d'où : $t = \int \lambda(a)\,da$ Les équations deviennent :

$$\frac{dx'}{dt} = \xi(x', y') \qquad \frac{dy'}{dt} = \eta(x', y') \qquad (1)$$

Quelles que soient les valeurs de x et y, les fonctions x', y' doivent vérifier ces 2 équations différentielles ; donc les 2 équations finies :

$$x' = f(x, y, t) \qquad y' = \varphi(x, y, t) \qquad (2)$$

où x, y sont considérés comme 2 constantes (arbitraires) représentent l'intégrale générale du système (1)

Il reste à déterminer ces constantes par les conditions imposées aux fonctions x', y'. Or on sait que pour la valeur a_0 du paramètre, on a : $x' = x$, $y' = y$ par hypothèse.

On s'arrangera donc pour qu'à la valeur a_0 du paramètre corresponde la valeur $t = 0$ du nouveau paramètre, en posant :

$$t = \int_{a_0}^{a} \lambda(a)\,da$$

et ensuite pour que :

$$f(x, y, 0) = x \qquad \varphi(x, y, 0) = y.$$

Ainsi, tout groupe de transformations à un paramètre peut être considéré comme représentant l'intégrale générale d'un système

d'équations différentielles ordinaires du 1er ordre.

Réciproquement, étant donné un système d'équations différentielles, on va démontrer qu'on peut en déduire la formation d'un groupe.
Soient les équations différentielles simultanées :

$$\frac{dx'}{dt} = \xi(x', y') \qquad \frac{dy'}{dt} = \eta(x', y')$$

et, pour déterminer leurs intégrales, assignons aux fonctions x', y' les valeurs x, y pour $t = 0$.
On en déduit l'équation différentielle du 1er ordre

$$\frac{dx'}{\xi(x'y')} = \frac{dy'}{\eta(x'y')}$$

dont l'intégrale générale est : $F(x', y') = C$

Or on a d'autre part : $\dfrac{dx'}{\xi(x'y')} = dt$

Remplaçons dans cette dernière équation y' par sa valeur tirée de l'intégrale générale, en fonction de x' et de C, et intégrons :

$$\varphi(x', C) = t + h \qquad \text{Or :} \quad C = F(x', y')$$

Substituons :

$$\Phi(x', y') = t + h$$

On disposera des 2 constantes C et h de manière que pour $t = 0$, $x' = x$, $y' = y$: $\quad C = F(x, y) \qquad h = \Phi(x, y)$

On a ainsi les 2 équations finies :

$$F(x', y') = F(x, y) \qquad \Phi(x', y') - \Phi(x, y) = t.$$

Il est aisé de vérifier qu'elles forment bien un groupe. Faisons une 2e transformation : $F(x''y'') = F(x'y') \qquad \Phi(x''y'') - \Phi(x'y') = t$

On a bien : $F(x''y'') = F(xy)$ $\Phi(x''y'') - \Phi(xy) = t + t'$

relations de même forme, où $t'' = t + t'$.

Si l'on écrit : $x'' = f(x', y', t')$ $y'' = \varphi(x', y', t')$

on aura : $x'' = f(x, y, t + t')$ $y'' = \varphi(x, y, t + t')$

Ainsi la formation des groupes à 1 paramètre dépend d'une équation différentielle du 1er ordre, c.à.d. de la connaissance des 2 fonctions ξ et η qui sont les dérivées des fonctions x' et y' par rapport au paramètre t. — Pour un accroissement infiniment petit δt du paramètre, x' et y' s'accroissent des quantités : $\delta x' = \xi(x'y')\,\delta t$ $\delta y' = \eta(x'y')\,\delta t$

L'ensemble de ces dernières formules s'appelle une transformation infinitésimale. Il résulte de la démonstration précédente que la transformation infinitésimale d'un groupe détermine ce groupe. — La recherche des groupes est ainsi ramenée à l'intégration d'un système d'équations différentielles.

M. Sophus Lie a généralisé ces propriétés des groupes :

Un groupe à r paramètres a r transformations infinitésimales qui ~~déterminent~~ caractérisent ce groupe.

On peut obtenir un groupe quand on connaît ses r transformations infinitésimales, en intégrant le système d'équations différentielles qu'elles constituent —

Les r transformations infinitésimales d'un groupe à r paramètres sont liées par certaines relations.



Appliquons les conclusions de cette théorie aux équations du 1er ordre, en les mettant sous la forme : $Y dx - X dy = 0$

Cherchons à quelles conditions cette équation admet un groupe de transformations à 1 paramètre, c.à.d. à quelles conditions cette transformation n'altère ni l'équation ni son intégrale générale autrement dit conserve les courbes intégrales (qui sont à elles-mêmes leurs transformées) — Soit la transformation :

$$x' = f(x, y, t) \qquad y' = \varphi(x, y, t)$$

et la transformation infinitésimale correspondante :

$$\delta x = \xi(x, y)\,\delta t \qquad \delta y = \eta(x, y)\,\delta t$$

Nous allons chercher quelle est la condition nécessaire pour que l'équation transformée : $Y(x'y')\,dx' - X(x'y')\,dy' = 0$

soit identique à l'équation primitive donnée : $Y(x, y)\,dx - X(x, y)\,dy = 0$. [Lacune : voir Humbert, page 31]

Considérons d'abord la transformation infinitésimale : $\frac{\delta x}{\delta t} = \xi \quad \frac{\delta y}{\delta t} = \eta$.

La dérivée du 1er membre par rapport à t doit lui être égale, à un facteur constant près — Prenons la dérivée de la transformée :

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial Y}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial t}\right)dx' + Y(x'y')\,d\frac{\partial x'}{\partial t} - \left(\frac{\partial X}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial X}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial t}\right)dy' - X(x'y')\,d\frac{\partial y'}{\partial t}$$

Or :

$$\frac{\partial x'}{\partial t} = \xi(x'y') \qquad \frac{\partial y'}{\partial t} = \eta(x'y')$$

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial x'}\xi + \frac{\partial Y}{\partial y'}\eta\right)dx' + Y\left(\frac{\partial \xi}{\partial x'}dx' + \frac{\partial \xi}{\partial y'}dy'\right) - \left(\frac{\partial X}{\partial x'}\xi + \frac{\partial X}{\partial y'}\eta\right)dy' - X\left(\frac{\partial \eta}{\partial x'}dx' + \frac{\partial \eta}{\partial y'}dy'\right)$$

Écrivons que les coefficients de dx', dy' dans cette expression sont proportionnels à ceux de dx', dy' dans : $(Y dx' - X dy')$: nous trouvons ainsi la condition :

$$\frac{Y}{X} = \frac{\xi \frac{\partial Y}{\partial x} + \eta \frac{\partial Y}{\partial y} + Y \frac{\partial \xi}{\partial x} - X \frac{\partial \eta}{\partial x}}{\xi \frac{\partial X}{\partial x} + \eta \frac{\partial X}{\partial y} - Y \frac{\partial \xi}{\partial y} + X \frac{\partial \eta}{\partial y}}$$

Cette condition est nécessaire pour que l'équation proposée admette la transformation infinitésimale. Nous allons prouver qu'elle est suffisante pour que l'équation admette la transformation finie c.à.d. le groupe. On a par hypothèse :

$$\frac{\xi \frac{\partial Y}{\partial x} + \eta \frac{\partial Y}{\partial y} + Y \frac{\partial \xi}{\partial x} - X \frac{\partial \eta}{\partial x}}{Y} = \frac{\xi \frac{\partial X}{\partial x} + \eta \frac{\partial Y}{\partial y} - Y \frac{\partial \xi}{\partial y} + X \frac{\partial \eta}{\partial y}}{X} = k$$

d'où, en posant : $Y dx - X dy = U$,

$$\frac{\delta U}{\delta t} = kU \qquad k \text{ est fonction de } x, y, t, \text{ finie pour } t = 0.$$

$$\frac{\delta U}{U} = k\,\delta t \qquad \text{Intégrons :} \qquad \log \frac{U}{U_0} = \int_0^t k\,\delta t$$

en appelant U_0 la valeur de U pour $t = 0$: c.à.d.

$$U_0 = Y(x, y)\,dx - X(x, y)\,dy$$

L'intégrale $\int k\,\delta t$ sera finie, et on aura :

$$U = U_0\, e^{\int k\,\delta t}$$

l'exponentielle étant finie et différente de zéro. Donc si $U_0 = 0$, $U = 0$; c.à.d. que si l'équation primitive est vérifiée, la transformée l'est aussi, autrement dit elles sont identiques. Ainsi l'équation admet le groupe, c.à.d. ne varie pas quand on lui fait subir la transformation finie. Géométriquement, les courbes intégrales de l'équation transformée coïncident avec celles de l'équation primitive ; on dit que la transformation les

conservé, ou qu'elles sont à elles-mêmes leurs propres transformées.

Ce résultat était d'ailleurs facile à prévoir : il est naturel qu'une équation qui admet la transformation infinitésimale admette aussi la transformation finie ; car si la première est identique, on pourra la prolonger de proche en proche et obtenir une transformation finie qui sera elle-même identique.

Théorème. L'équation linéaire : $Y dx - X dy = 0$

admet comme facteur intégrant : $\frac{1}{X\eta - Y\xi}$

L'équation admet toujours, d'abord, la transformation insignifiante et inutile : $\delta x = \xi \quad \delta y = \eta$

qui donne : $$Y\xi - X\eta = 0$$

Supposons : $$X\eta - Y\xi \gtrless 0$$

on peut diviser par ce facteur, et l'on a la nouvelle équation :

$$\frac{Y}{X\eta - Y\xi}dx - \frac{X}{X\eta - Y\xi}dy = 0$$

dont le 1er membre est une différentielle totale ~~exacte~~. On a en effet :

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{Y}{X\eta - Y\xi}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-X}{X\eta - Y\xi}\right) = 0$$

(page 20)

Ce théorème comprend comme cas particulier un résultat déjà trouvé : Si X et Y sont des fonctions homogènes de même degré en x et y, l'équation admet évidemment la transformation :

$$x' = ax \qquad y' = ay$$

qui forme manifestement un groupe. Écrivons-le sous cette forme :

$$x' = (1+t)x \qquad y' = (1+t)y$$

afin que pour $t = 0$, on ait : $x' = x, \quad y' = y.$

La transformation infinitésimale correspondante est :

$dx' = x\,dt \qquad dy' = y\,dt$ D'où : $\xi = x \qquad \eta = y$

Le facteur intégrant est donc dans ce cas : $\dfrac{1}{Xy - Yx}$

Autre exemple. Une autre transformation qui constitue un groupe est la rotation d'une figure dans son plan autour de l'origine : le groupe a pour paramètre l'angle α dont la figure a tourné. On a, en coordonnées polaires :

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta$$

La transformation peut s'écrire :

$$x' = r\cos(\theta + t) \qquad y' = r\sin(\theta + t)$$

ou : $x' = x\cos t - y\sin t \qquad y' = y\cos t + x\sin t$

Pour $t = 0$, on a bien : $x' = x, \quad y' = y.$

Prenons les dérivées de x', y' par rapport à t, et faisons $t = 0$, pour obtenir la transformation infinitésimale :

$dx' = -y\,dt \qquad dy' = x\,dt$ donc : $\xi = -y \qquad \eta = x$

Ainsi, si une équation différentielle du 1er ordre admet ce groupe, elle aura pour facteur intégrant : $\dfrac{1}{Xx + Yy}$

Il en est ainsi pour certaines lignes tracées sur des surfaces — Considérons par exemple les surfaces hélicoïdes :

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta \qquad z = f(r) + k\theta$$

Les équations des lignes de courbure et des lignes asymptotiques de ces surfaces projetées sur le plan des xy, admettent le groupe précédent, c.à.d. ne varient pas quand la surface tourne ; en effet, ces lignes se

conservent identiques à elles-mêmes quand la surface est animée d'un mouvement hélicoïdal tel qu'elle coïncide toujours avec elle-même (mouvement d'une vis dans son écrou). Donc les projections de ces lignes sur un plan perpendiculaire à l'axe Oz se conservent dans la rotation autour de cet axe. Par suite, les équations différentielles en x, y de ces lignes admettent la transformation infinitésimale

$dx = -y\,dt \qquad dy = x\,dt$ et par conséquent le facteur intégrant :

$$\frac{1}{Xx + Yy}$$

On est donc certain d'obtenir les équations finies de ces lignes par des quadratures.

Plus généralement, toutes les fois qu'une certaine surface admet une transformation qui conserve ses lignes (de courbure, asymptotiques, géodésiques, etc) c.à.d. qui les transforme les unes dans les autres, on pourra intégrer l'équation différentielle de ses lignes. Soit par exemple la surface : $x^m y^n z^p = a$

Posons la transformation suivante : $x' = \alpha x \qquad y' = \beta y$

avec la condition : $\alpha^m \beta^n = 1 \qquad \beta = \alpha^{-\frac{m}{n}}$

Cette transformation ne change pas l'équation de la surface ; de plus, elle forme un groupe. C'est une transformation homographique des projections des lignes sur le plan des xy ; $x' = \alpha x \quad y' = \alpha^{-\frac{m}{n}} y$.

Elle conserve donc les lignes asymptotiques de la surface, ce qui prouve qu'on pourra intégrer leur équation — La transformation infinitésimale est : $dx' = x\,dt \qquad dy = \mu y\,dt \qquad \mu = -\frac{m}{n} \qquad 1+t = \alpha$

Elle est plus générale que la précédente, et fournit le facteur intégrant :

$\xi = x \qquad \eta = \mu y \qquad \dfrac{1}{X\mu y - Yx}$

On peut traiter ces questions relatives aux groupes par une autre méthode qui a l'avantage de pouvoir s'étendre aux équations d'ordre supérieur au 1er. Elle consiste à considérer, au lieu de l'équation linéaire :

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y}$$

l'équation aux dérivées partielles équivalente (2e cahier, page 117) :

$$X \frac{\partial F}{\partial x} + Y \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

On sait que si F est une solution de cette dernière équation, on a l'intégrale générale de la 1e en posant : $F(x, y) = C$ et en donnant à la constante C toutes les valeurs possibles.

On sait aussi que toute fonction de F est solution de l'équation aux dérivées partielles, et réciproquement. Écrivons cette équation sous la forme suivante :

$$a \frac{\partial F}{\partial x} + b \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

a, b étant toujours des fonctions quelconques de x, y.

Cherchons à quelles conditions cette équation admet un groupe donné :

$$x' = f(x, y, t) \qquad y' = \varphi(x, y, t)$$

c.à.d. nous entendons par là que si F(x, y) en est une solution, F(x', y') en est aussi une, et par conséquent est fonction de F(x, y).

Procédons comme précédemment : cherchons d'abord la condition nécessaire pour que l'équation admette la transformation infinitésimale :

$$x' = x + \xi\, \delta t \qquad y' = y + \eta\, \delta t$$

F(x', y') devient alors :

$$F(x + \xi\, \delta t, y + \eta\, \delta t) = F(x, y) + \left(\xi \frac{\partial F}{\partial x} + \eta \frac{\partial F}{\partial y}\right) \delta t$$

Pour que F(x', y') soit une solution, F(x, y) en étant une, il faut que $\left(\xi \frac{\partial F}{\partial x} + \eta \frac{\partial F}{\partial y}\right)$ soit aussi une solution. ξ et η sont les dérivées $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, donc $\left(\xi \frac{\partial F}{\partial x} + \eta \frac{\partial F}{\partial y}\right)$ est la dérivée $\frac{\partial F}{\partial t}$.

Mais comme ξ et η sont des fonctions données, il faut se demander à quelle condition, F étant une solution quelconque, l'expression: $\left(\xi \frac{\partial F}{\partial x} + \eta \frac{\partial F}{\partial y}\right)$ sera une solution de la même équation, c.à.d. sera une fonction de F, sans attacher à ξ et η la signification de dérivées. Pour cela, posons:

$$A(F) = a\frac{\partial F}{\partial x} + b\frac{\partial F}{\partial y} \qquad X(F) = \xi\frac{\partial F}{\partial x} + \eta\frac{\partial F}{\partial y}$$

et formons la combinaison: $A[X(F)] - X[A(F)]$

ou:

$$a\frac{\partial}{\partial x}\left(\xi\frac{\partial F}{\partial x} + \eta\frac{\partial F}{\partial y}\right) + b\frac{\partial}{\partial y}\left(\xi\frac{\partial F}{\partial x} + \eta\frac{\partial F}{\partial y}\right) - \xi\frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{\partial F}{\partial x} + b\frac{\partial F}{\partial y}\right) - \eta\frac{\partial}{\partial y}\left(a\frac{\partial F}{\partial x} + b\frac{\partial F}{\partial y}\right)$$

On voit que les termes du 2e ordre disparaissent, et il reste:

$$\left[a\frac{\partial\xi}{\partial x} + b\frac{\partial\xi}{\partial y} - \xi\frac{\partial a}{\partial x} - \eta\frac{\partial a}{\partial y}\right]\frac{\partial F}{\partial x} + \left[a\frac{\partial\eta}{\partial x} + b\frac{\partial\eta}{\partial y} - \xi\frac{\partial b}{\partial x} - \eta\frac{\partial b}{\partial y}\right]\frac{\partial F}{\partial y}$$

ou:

$$\left[A(\xi) - X(a)\right]\frac{\partial F}{\partial x} + \left[A(\eta) - X(b)\right]\frac{\partial F}{\partial y} = B(F)$$

Nous supposons que F est une solution de l'équation différentielle:

$$A(F) = 0$$

Nous voulons que ~~Par suite,~~ $X(F)$ soit aussi une solution de cette équation, c.à.d. que:

$$A(X) = 0$$

Donc on a:

$$A(X) - X(A) = B(F) = 0$$

c.à.d. que F est une solution de l'équation différentielle:

$$B(F) = 0$$

Cette équation étant équivalente à: $A(F) = 0$, leurs coefficients doivent être proportionnels: $\dfrac{A(\xi) - X(a)}{a} = \dfrac{A(\eta) - X(b)}{b}$

Telle est la condition nécessaire; on va démontrer qu'elle est suffisante.

Réciproquement, si cette condition est remplie, et que F soit une solution de: $A(F)=0$, elle sera aussi solution de: $B(F)=0$.

Dans l'identité: $$A(X)-X(A)=B(F)$$

$B(F)$ et $X(A)$ sont nuls; donc on a: $A[X(F)]=0$

ce qui prouve que $X(F)$ est aussi une solution de: $A(F)=0$.

Ainsi la proportion: $$\frac{A(\xi)-X(a)}{a}=\frac{A(\eta)-X(b)}{b}$$

est la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation aux dérivées partielles: $$a\frac{\partial F}{\partial x}+b\frac{\partial F}{\partial y}=0$$

admette la transformation infinitésimale:

$$\delta x=\xi(x,y)\delta t \qquad \delta y=\eta(x,y)\delta t$$

On verrait aisément que cette condition est la même, sous une autre forme, que celle qu'on a trouvée plus haut (page 27)

Passons maintenant à la transformation finie; nous allons prouver que l'équation aux dérivées partielles l'admet sous la même condition que la transformation infinitésimale, c.à.d. que $F(x',y')$ est solution de cette équation si $F(x,y)$ l'est, ou que $F(x'y')$ est fonction de $F(x,y)$. — Prenons la dérivée de $F(x'y')$ par rapport au paramètre t de la transformation finie:

$$\frac{\partial F}{\partial t}=\frac{\partial F}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial t}=\xi\frac{\partial F}{\partial x'}+\eta\frac{\partial F}{\partial y'}=X[F(x'y')]$$

d'où: $$\frac{\partial F}{X(F)}=\partial t$$

Intégrons: $$\int\frac{\partial F}{X(F)}=\Phi(F)=t+C$$

Calculons C; pour $t=0$, $$C=\Phi[F(x,y)]$$

Donc: $$\Phi[F(x',y')]=t+\Phi[F(x,y)]$$

ce qui prouve que $F(x', y')$ est fonction de $F(x, y)$ comme nous l'avions annoncé.

— Considérons maintenant l'équation différentielle du 2e ordre :

$$f(x, y, y', y'') = 0$$

Cherchons si cette équation admet un groupe donné, c.à.d. si elle ne varie pas quand on y fait la transformation :

$$x_1 = f(x, y, t) \qquad y_1 = \varphi(x, y, t)$$

$$y'_1 = \frac{dy_1}{dx_1} \qquad y''_1 = \frac{d^2y_1}{dx_1^2}$$

Prenons par exemple l'équation homogène du 2e ordre ; cherchons d'abord quelle est sa forme. Pour l'équation homogène du 1er degré : $f(x, y, y') = 0$ où $y' = \frac{dy}{dx}$, elle ne change pas quand on y remplace x par ax, y par ay ; y' reste le même, la constante a s'éliminant d'elle-même : il suffit donc que l'équation soit homogène en x et y comme une équation algébrique. Mais pour l'équation du 2e ordre, si l'on y change x en ax, y en ay, $\frac{dy}{dx}$ ne change pas, et $\frac{d^2y}{dx^2}$ devient $\frac{1}{a}\frac{d^2y}{dx^2}$ (parce que $\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y_1}{dx_1^2} = \frac{d^2y}{dx^2}\frac{dx}{dx_1}$. Or : $\frac{dx}{dx_1} = \frac{1}{a}$.)

Pour que l'équation soit homogène, il faut qu'on ait identiquement quel que soit a :

$$f\left(ax, ay, \frac{dy}{dx}, \frac{1}{a}\frac{d^2y}{dx^2}\right) = a^n f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right)$$

ou : $f(ax, ay, y', \frac{y''}{a}) = 0$ quand : $f(x, y, y', y'') = 0$.

Faisons dans l'équation homogène du 2e ordre la transformation :

$x = e^t \qquad y = ze^t$ t est la nouvelle variable, z la nouvelle fonction. On a : $\qquad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \qquad (y = zx)$

$\frac{dy}{dx} = z + \frac{dz}{dt} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x}\frac{dz}{dt} + \frac{1}{x}\frac{d^2z}{dt^2}$

L'équation différentielle devient, par la substitution :

$$f\left(x,\ zx,\ z + \frac{dz}{dt},\ \frac{1}{x}\frac{dz}{dt} + \frac{1}{x}\frac{d^2z}{dt^2}\right) = 0$$

Comme elle est homogène, elle ne dépend pas de x, qui s'élimine en facteur comme un paramètre. Elle se réduit donc à :

$$f\left(1,\ z,\ z + \frac{dz}{dt},\ \frac{dz}{dt} + \frac{d^2z}{dt^2}\right) = 0$$

qui ne contient pas la variable indépendante t.

En vertu d'une propriété générale des équations différentielles, une équation qui ne contient pas la variable indépendante peut se ramener à une équation de degré moindre d'une unité.

Soit l'équation du 2e ordre : $\qquad f\left(y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$

Posons : $\frac{dy}{dx} = p$ y sera la variable, p la fonction.

$\frac{d^2y}{dx^2} = p\frac{dp}{dy}$ L'équation transformée est :

$$f\left(y,\ p,\ p\frac{dp}{dy}\right) = 0$$ du 1er ordre

En résolvant cette équation, on tirera p en fonction de y :

$\frac{dy}{dx} = p = \varphi(y)$ et l'on aura x par une quadrature :

$dx = \frac{dy}{\varphi(y)} \qquad x = \int \frac{dy}{\varphi(y)}$

Il suffira de faire l'inversion de cette intégrale pour obtenir y en fonction de x.

Ainsi une équation homogène du 2e ordre admet le groupe :

$$x_1 = ax \qquad y_1 = ay$$

et son intégration se ramène à la résolution d'une équation du 1er ordre suivie d'une quadrature.

— Considérons le groupe : (1) $x_1 = \varphi(x, y, t)$ $\quad y_1 = f(x, y, t)$ (2)
Concevons que y soit fonction de x ; alors, en vertu des équations (1) et (2), y_1 sera fonction de x_1. Sa dérivée sera :

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy}{\frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy} \quad \text{ou :} \quad y_1' = \frac{\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}y'}{\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}y'} \qquad (3)$$

Les 3 équations (1) (2) (3) forment un groupe de transformations :

$$x_1 = \varphi(x, y, t) \qquad y_1 = f(x, y, t) \qquad y_1' = \psi(x, y, y', t)$$

Ainsi d'un groupe de transformations à 2 variables on peut déduire un groupe à 3 variables $x_1\ y_1\ y'$ ou $\frac{dy}{dx}$. — Cherchons la transformation infinitésimale correspondante, et calculons $\delta y'$:

$$\delta y' = \delta \frac{dy}{dx} = \frac{dx\,\delta dy - dy\,\delta dx}{dx^2}$$

Or : $\quad \delta dy = d\delta y = d(\eta\,\delta t) = \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}dx + \frac{\partial \eta}{\partial y}dy\right)\delta t$

$\quad \delta dx = d\delta x = d(\xi\,\delta t) = \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}dx + \frac{\partial \xi}{\partial y}dy\right)\delta t$

Substituons ces expressions dans $\delta y'$; il vient :

$$\delta y' = \left[\frac{\partial \eta}{\partial x} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial x}\right)y' - \frac{\partial \xi}{\partial y}y'^2\right]\delta t = \eta_1(x, y, y')\,\delta t.$$

La transformation infinitésimale se compose des 3 équations :

$$\delta x = \xi(x, y)\,\delta t \qquad \delta y = \eta(x, y)\,\delta t \qquad \delta y' = \eta_1(x, y, y')\,\delta t$$

— On pourrait reprendre ici l'équation différentielle du 1er ordre :

$y' = \Phi(x, y)$ et la traiter par une 3e méthode:

Elle admettra le groupe (1)(2) si elle admet le groupe (1)(2)(3) ou sa transformation infinitésimale que nous venons de écrire.

Cherchons à quelle condition l'équation ne changera pas quand on y remplacera x par $x+\delta x$, y par $y+\delta y$, y' par $y'+\delta y'$. On trouve aisément que pour cela il faut que l'on ait identiqt:

$$\delta y' = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\delta y \qquad \text{ou:} \qquad \eta_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\xi + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\eta$$

En exprimant cette condition, on retrouverait la relation déjà trouvée sous 2 formes différentes (pages 27 et 32)

On vérifierait aussi de la même manière que si l'équation admet la transformation infinitésimale, elle admet le groupe lui-même.

— Nous venons d'étendre le groupe à la dérivée première de y; étendons-le encore à la dérivée seconde, afin de pouvoir appliquer cette nouvelle méthode à l'équation différentielle du 2e ordre.

On aura: $$y_1'' = \frac{dy_1'}{dx_1} = \frac{\frac{\partial \psi}{\partial x}dx + \frac{\partial \psi}{\partial y}dy + \frac{\partial \psi}{\partial y'}dy'}{\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy} = X(x, y, y', y''; t) \qquad (4)$$

Les 4 équations (1)(2)(3)(4) formeront un groupe, par lequel on transformera x, y, y', y'' en x_1, y_1, y_1', y_1''.

La transformation infinitésimale correspondante se calcule aisément: $$\delta y'' = \delta \frac{dy'}{dx} = \frac{dx\,\delta dy' - dy'\,\delta dx}{dx^2}$$ On a:

$$\delta dy' = d\delta y' = \left(\frac{\partial \eta_1}{\partial x}dx + \frac{\partial \eta_1}{\partial y}dy + \frac{\partial \eta_1}{\partial y'}dy'\right)\delta t$$

$$\delta dx = d\delta x = \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}dx + \frac{\partial \xi}{\partial y}dy\right)\delta t$$

Substituons:

$$\delta y'' = \left(\frac{\partial \eta_1}{\partial x} + \frac{\partial \eta_1}{\partial y} y' + \frac{\partial \eta_1}{\partial y'} y'' - \frac{\partial \xi}{\partial x} y'' - \frac{\partial \xi}{\partial y} y' y'' \right) dt = \eta_2 (x, y, y', y'') \, dt.$$

D'où la transformation infinitésimale :

$$\delta x = \xi(x,y)\,dt \quad \delta y = \eta(x,y)\,dt \quad \delta y' = \eta_1(x,y,y')\,dt \quad \delta y'' = \eta_2(x,y,y',y'')\,dt$$

— Considérons maintenant l'équation différentielle du 2e ordre :

$$y'' = \Phi(x, y, y')$$

et cherchons à quelles conditions elle admet le groupe précédent — On devra avoir identiquement :
$$\delta y'' = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \Phi}{\partial y'} \delta y'$$

ou, en substituant :
$$\eta_2 = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \xi + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \eta + \frac{\partial \Phi}{\partial y'} \eta_1$$

Cette relation doit devenir une identité quand on y remplace y'' par $\Phi(x, y, y')$. Ce sera une identité entre x, y, y'. Or ξ et η ne contiennent que x et y ; donc tous les coefficients de y' devront être nuls — On aura en général un certain nombre d'équations de condition, ou même une infinité, auxquelles les fonctions ξ et η devront satisfaire — Donc, en général, l'équation du 2e ordre n'admettra pas le groupe proposé, ξ et η étant des fonctions quelconques.

On voit que ce résultat est bien différent de celui que nous avons obtenu pour l'équation du 1er ordre : celle-ci admet toujours un groupe, moyennant une condition imposée aux 2 fonctions ξ et η ; les équations d'ordre supérieur n'admettent un groupe que lorsqu'elles sont d'une forme particulière : ce sont des cas exceptionnels.

On a vu un de ces cas particuliers précédemment (page 35) : l'équation homogène du 2e degré admet la transformation infinitésimale :

$$\delta x = x\,\delta t \qquad \delta y = y\,\delta t$$

Il y a intérêt à connaître une transformation infinitésimale admise par une équation différentielle : si elle est unique, on peut déterminer les 2 fonctions ξ, η qui la constituent. On en tire parti pour abaisser l'ordre de l'équation différentielle.

En particulier, si une équation du 2e ordre admet une transformation infinitésimale : $\delta x = \xi\,\delta t$, $\delta y = \eta\,\delta t$, son intégration se ramène à l'intégration d'une équation du 1er ordre et à une quadrature. — L'équation homogène traitée ci-dessus en est l'exemple le plus simple.

Pour démontrer ce théorème, nous emploierons une autre méthode. Au lieu d'une équation du 2e ordre, on peut considérer 2 équations du 1er ordre :

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z} \qquad (1)$$

X, Y, Z étant des fonctions de x, y, z. Elles sont équivalentes à l'équation aux dérivées partielles :

$$X\frac{\partial F}{\partial x} + Y\frac{\partial F}{\partial y} + Z\frac{\partial F}{\partial z} = 0 \qquad (2)$$

Soient : $F_1(x, y, z)$ $F_2(x, y, z)$

2 solutions de cette équation (2) ; toute autre solution de cette équation sera une fonction de F_1 et F_2, et une fonction quelconque de F_1, F_2 sera une solution de cette équation (2), et l'intégrale générale des équations (1) sera représentée par les 2 équations :

$$F_1(x, y, z) = C_1 \qquad F_2(x, y, z) = C_2$$

où C_1, C_2 sont des constantes arbitraires. — Soit d'autre part une transformation infinitésimale : $\delta x = \xi(x, y, z)\,\delta t$

$$\delta y = \eta(x, y, z)\,\delta t \qquad \delta z = \zeta(x, y, z)\,\delta t$$

Cherchons à quelle condition les équations (1) admettront ce groupe. Si l'on remplace x par $x+\delta x$, y par $y+\delta y$, z par $z+\delta z$, l'équation (2) doit rester identique à elle même, c.à.d. que:

$B(F) = \xi \frac{\partial F}{\partial x} + \eta \frac{\partial F}{\partial y} + \zeta \frac{\partial F}{\partial z}$ doit en être une solution.

En effectuant la combinaison: $A[B(F)] - B[A(F)] = C(F)$ et en raisonnant comme précédemment dans le cas de 2 variables (page 32) on trouve que $C(F)$ doit être identique à un facteur près, à $A(F)$, c.à.d. qu'on doit avoir:

$$A(B) - B(A) = \lambda A(F) \qquad \lambda \text{ étant fonction de } x, y, z$$

Telle est la condition pour que l'équation (2): $A(F) = 0$ admette la transformation proposée.

On est amené à se demander si, en supposant que l'équation (2) aux dérivées partielles admet cette transformation infinitésimale (ξ, η, ζ), on peut s'en servir pour déterminer l'intégrale de l'équation (1). Mais avant d'étudier cette question, nous établirons quelques lemmes relatifs aux équations linéaires, d'après Clebsch.

Soit une équation linéaire aux dérivées partielles:

$$A(F) = a_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} + \ldots\ldots + a_n \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0 \qquad (1)$$

$a_1\, a_2 \ldots\ldots a_n$ étant des fonctions des variables $x_1\, x_2 \ldots\ldots x_n$

Elle est équivalente au système de $(n-1)$ équations du 1er ordre:

$$\frac{dx_1}{a_1} = \frac{dx_2}{a_2} = \ldots\ldots = \frac{dx_n}{a_n} \qquad (2)$$

Soient $F_1\, F_2 \ldots\ldots F_{n-1}$ $(n-1)$ solutions de l'équation (1); les équations (2) admettent les $(n-1)$ intégrales premières:

$F_1(x_1 x_2 \ldots x_n) = C_1 \quad F_2 = C_2 \ldots\ldots F_{n-1} = C_{n-1}$

Toute fonction de $F_1 F_2 \ldots F_{n-1}$ est une solution de l'équation (1) et réciproquement. — Soit une 2e équation de même forme

$$B(F) = b_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + b_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} + \ldots\ldots + b_n \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0$$

Cherchons à quelle condition ces 2 équations aux dérivées partielles admettent des solutions communes, à part la solution insignifiante :

$$F = C^{te}$$

Nous ne considérons que les solutions distinctes, c.à.d. qui ne dépendent pas les unes les autres, puisqu'il y a une infinité de fonctions des solutions qui sont elles-mêmes des solutions. S'il y a des solutions distinctes communes, elles sont nécessairement en nombre fini, car chaque équation a $(n-1)$ solutions distinctes, et il y en aura au plus $(n-1)$. Reste à savoir : 1° combien il y en a ; 2° comment on peut les trouver.

Formons encore la combinaison suivante, que nous désignerons par le symbole :

$$(A,B) = A\big[B(F)\big] - B\big[A(F)\big]$$

C'est une expression linéaire par rapport aux dérivées premières, car on sait que les dérivées secondes disparaissent dans la différence.

$$\Big[A(b_1) - B(a_1)\Big]\frac{\partial F}{\partial x_1} + \Big[A(b_2) - B(a_2)\Big]\frac{\partial F}{\partial x_2} + \ldots + \Big[A(b_n) - B(a_n)\Big]\frac{\partial F}{\partial x_n} = (A,B)$$

Supposons qu'il existe une solution commune aux 2 équations :

$$A(F) = 0 \qquad\qquad B(F) = 0$$

elle annule A, B, donc elle annulera (A, B) ; elle sera une solution de l'équation :

$$(A,B) = 0.$$

Il faut distinguer 2 cas : 1°. Ou bien cette dernière équation n'est qu'une combinaison linéaire des 2 premières, c.à.d. qu'on a :

$$(A,B) = \lambda A(F) + \mu B(F)$$

alors elle sera nécessairement vérifiée par toute solution commune puisqu'elle n'est pas distincte des 2 premières ;

2° Ou bien la nouvelle équation est indépendante des 2 autres, et l'on a $(A,B) = C_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + C_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} + \dots + C_n \frac{\partial F}{\partial x_n} = C(F)$

Alors la solution commune vérifie les 3 équations linéaires distinctes : $A(F) = 0 \quad B(F) = 0 \quad C(F) = 0$

En répétant le même raisonnement sur ce système de 3 équations linéaires qui a pour solutions communes les solutions communes aux 2 premières équations, on formera les combinaisons de ces équations deux à deux : $(A,B) = C, \quad (B,C) \quad , \quad (C,A)$

Si ce sont de simples combinaisons linéaires de A, B, C, on les négligera, comme ne fournissant pas d'équations distinctes ; sinon, on obtiendra des équations nouvelles de même forme :

$$D(F) = 0 \qquad E(F) = 0 \quad , \dots$$

qui vérifieront encore les solutions communes, et qu'on ajoutera aux précédentes. On opérera de même sur le nouveau système, en lui ajoutant les équations fournies par les combinaisons distinctes des équations anciennes, jusqu'à ce qu'on obtienne un système tel que les combinaisons deux à deux de toutes ses équations se réduisent à des combinaisons linéaires de ces équations. Or ce terme doit nécessairement être atteint : car on ne peut avoir plus de $\underline{n}$ équations distinctes entre les $\underline{n}$ dérivées partielles de F.

Un système formé comme nous venons de le dire s'appelle un système complet. Il comprend $\underline{n}$ équations au plus :

$$A(F) = 0 \quad B(F) = 0 \quad C(F) = 0 \quad \dots\dots\dots \quad L(F) = 0$$

Le cas le moins intéressant est celui où il contient n équations. Le déterminant fonctionnel de $A, B, C \ldots\ldots L$, n'est pas nul, puisque par hypothèse aucune de ces expressions n'est une combinaison linéaire des autres; d'ailleurs, si tous les termes d'une ligne ou d'une colonne étaient nuls, il n'y aurait plus n équations, ou il n'y aurait plus n variables. On a donc identiquement: $\frac{\partial F}{\partial x_1} = 0 \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} = 0 \ldots\ldots\ldots \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0$

ce qui prouve que la seule solution commune aux n équations et par suite aux 2 premières, est: $F = C^{te}$

— Dans le cas général où le système complet contient $(n-p)$ équations, demandons nous s'il y a des solutions communes.

— Lemmes. I. La combinaison: $A[B(F)]$

est invariante par rapport aux variables indépendantes. En effet, elle est linéaire par rapport aux dérivées; donc si l'on a un système complet pour les variables $x_1 x_2 \ldots\ldots x_n$, on aura le même système complet avec les nouvelles variables $x'_1, x'_2 \ldots\ldots x'_n$.

II. Si l'on forme $(n-p)$ combinaisons linéaires distinctes des équations d'un système complet:

$$A_1 = \lambda A + \mu B + \ldots\ldots\ldots + \nu L = 0$$
$$B_1 = \lambda' A + \mu' B + \ldots\ldots\ldots + \nu' L = 0$$
$$\text{———————————————}$$
$$L_1 = \lambda^{n-p} A + \mu^{n-p} B + \ldots\ldots\ldots + \nu^{n-p} L = 0$$

ces équations formeront un nouveau système complet. En effet, combinons-en 2 quelconques: $(A_1, B_1) = \Sigma(\lambda A, \mu' B)$

Or: $(\lambda A, \mu' B) = \lambda A(\mu' B) - \mu' B(\lambda A) = \lambda B A(\mu') - \mu' A B(\lambda) + \lambda\mu'(A, B)$

On obtient une combinaison linéaire de A et B; en général, toute combinaison de 2 des fonctions A, B, ... I, est une combinaison linéaire de A, B, ... I, c.à.d. de A. B, ... I.
Ainsi le système reste complet quand on remplace les fonctions A, B, ... I par des combinaisons linéaires de ces fonctions.

On appelle système jacobien un système complet pour lequel la combinaison de 2 quelconques des équations, comme (A, B) est identiquement nulle.

Théorème. D'un système complet on peut tirer un système jacobien par des opérations algébriques.

En effet, on peut résoudre les $(n-p)$ équations du système complet par rapport à $(n-p)$ dérivées partielles; on obtient ainsi:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} - \Sigma a'_{n-p+1} \frac{\partial F}{\partial x_{n-p+1}} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} - \Sigma b'_{n-p+1} \frac{\partial F}{\partial x_{n-p+1}} = 0$$

— — — — — — — — — — — —

$$\frac{\partial F}{\partial x_{n-p}} - \Sigma l'_{n-p+1} \frac{\partial F}{\partial x_{n-p+1}} = 0$$

Ces nouvelles équations sont des combinaisons linéaires des premières; donc elles forment un système complet.

Ce nouveau système est, de plus un système jacobien: en effet,

Théorème: Un système complet de $(n-p)$ équations admet p solutions distinctes.

Puisqu'on peut transformer un système complet en un système jacobien équivalent, supposons que le système complet:

$$A=0,\quad B=0,\quad C=0,\ \ldots\ldots\ldots\ I=0$$

soit jacobien.

La 1e équation a pour solutions $(n-1)$ fonctions de $x_1\, x_2 \ldots x_n$, que nous appellerons: $y_2\, y_3 \ldots\ldots y_n$.

Ajoutons-y une fonction quelconque y_1 de $x_1\, x_2 \ldots x_n$, soumise à la seule condition que le déterminant fonctionnel de $y_1\, y_2\, y_3 \ldots\ldots y_n$ ne soit pas nul. Prenons ces n lettres pour nouvelles variables; en résolvant le système:

$$f_1(x_1\, x_2\, x_3 \ldots\ldots x_n) = y_1$$
$$f_2(x_1\, x_2\, x_3 \ldots\ldots x_n) = y_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f_n(x_1\, x_2\, x_3 \ldots\ldots x_n) = y_n$$

par rapport aux anciennes variables on tirera $x_1\, x_2 \ldots x_n$ en fonction de $y_1\, y_2 \ldots y_n$.

Cherchons quelle sera la forme des équations du système après ce changement de variables. La 1e exprimera qu'une fonction quelconque de $y_2\, y_3 \ldots y_n$ est une solution, c.à.d. que F ne dépend pas de y_1: $\dfrac{\partial F}{\partial y_1} = 0.$

On résoudra les autres équations par rapport aux dérivées partielles ~~prises~~ relatives aux nouvelles variables $y_2\, y_3 \ldots y_n$;

$$\frac{\partial F}{\partial y_2} - \Sigma_1 b'_{n-p+1} \frac{\partial F}{\partial y_{n-p+1}} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y_3} - \Sigma c'_{n-p+1} \frac{\partial F}{\partial y_{n-p+1}} = 0$$

— — — — — — — — — — — —

$$\frac{\partial F}{\partial y_{n-p}} - \Sigma_1 l'_{n-p+1} \frac{\partial F}{\partial y_{n-p+1}} = 0$$

On aura en tout $(n-p)$ équations transformées en $y_1 y_2 y_3 \ldots y_n$ qui forment un système jacobien. Or les coefficients $b', c', \ldots l'$ sont fonctions de $y_2 y_3 \ldots y_n$, mais ne dépendent pas de y_1 : on a donc ci-dessus $(n-p-1)$ équations à $(n-1)$ variables. En effet, les combinaisons de ces équations deux à deux étant identiquement nulles, on a par exemple :

$$-\frac{\partial F}{\partial y_{n-p+1}} \times \frac{\partial b'_{n-p+1}}{\partial y_1} = 0 \qquad \text{d'où :} \quad \frac{\partial b'_{n-p+1}}{\partial y_1} = 0$$

On est donc ramené à résoudre un système jacobien de $(n-p-1)$ équations à $(n-1)$ variables. En opérant et raisonnant de même de proche en proche on ramènera la recherche des solutions communes des $(n-p)$ équations primitives à la résolution d'une équation unique à $(p+1)$ variables, qui a en général p solutions distinctes. Le théorème est donc démontré.

Le raisonnement dont nous nous sommes servi pour établir le théorème précédent fournit en même temps une méthode pour trouver ces p solutions distinctes. Mais cette méthode serait longue et pénible, car il faudrait résoudre le système de $(n-p)$ équations à n variables, puis le système de $(n-p-1)$ équations à $(n-1)$ variables

et ainsi de suite, une série de systèmes jusqu'à l'équation unique à $(p+1)$ variables — On peut trouver une méthode plus simple pour laquelle le nombre des équations est réduit au minimum, savoir p équations pour déterminer les p solutions —

— Considérons une seule équation linéaire aux dérivées partielles :

$$a_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots\dots + a_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$

elle sera intégrée si l'on peut intégrer le système équivalent de $(n-1)$ équations ordinaires à n variables :

$$\frac{dx_1}{a_1} = \frac{dx_2}{a_2} = \dots\dots = \frac{dx_n}{a_n}$$

qui aura $(n-1)$ intégrales premières de la forme :

$$f_1(x_1 x_2 \dots x_n), \quad f_2(x_1 x_2 \dots x_n) \dots\dots \quad f_{n-1}(x_1 x_2 \dots x_n)$$

que nous supposons holomorphes au voisinage d'un certain point (ou système de valeurs des n variables) ; ce point peut toujours être pris pour origine (c'est alors le système : $(0, 0, \dots 0)$.)

Si l'on peut obtenir les fonctions $f_1 f_2 \dots f_{n-1}$, on pourra faire en sorte que pour : $x_1 = 0$, la solution de l'équation aux dérivées partielles se réduise à une fonction donnée : $F(x_2, x_3, \dots x_n)$

Pour cela soit : $\psi(f_1, f_2 \dots f_{n-1})$ la solution la plus générale de l'équation ; on devra choisir la fonction ψ de manière que

$$\psi\left[f_1(0, x_2 \dots x_n), f_2(0, x_2 \dots x_n), \dots\dots f_{n-1}(0, x_2, \dots x_n)\right]$$

soit identique à : $F(x_2, x_3, \dots x_n)$ — Si l'on pose :

$y_1 = f_1(0, x_2, \dots x_n) \quad y_2 = f_2(0, x_2 \dots x_n) \dots\dots y_{n-1} = f_{n-1}(0, x_2, \dots x_n)$
on devra réaliser l'identité suivante :

$$\psi(y_1 y_2 \dots\dots y_{n-1}) = F(x_2 x_3 \dots\dots x_n)$$

Cette remarque faite, revenons au système complet jacobien :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \Sigma a_{n-p+1} \frac{\partial f}{\partial x_{n-p+1}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = \Sigma b_{n-p+1} \frac{\partial f}{\partial x_{n-p+1}}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_{n-p}} = \Sigma l_{n-p+1} \frac{\partial f}{\partial x_{n-p+1}}$$

Nous savons qu'il admet p solutions distinctes. Effectuons le changement de variables suivant, proposé par M. Meyer. Posons :

$$x_2 = x_1 y_2 \qquad x_3 = x_1 y_3 \quad \dots\dots\dots \quad x_{n-p} = x_1 y_{n-p}$$

ce qui substitue aux $(n-p-1)$ variables : $x_2 \; x_3 \dots\dots x_{n-p}$
les nouvelles variables : $y_2 \; y_3 \dots\dots y_{n-p}$
On conserve les anciennes variables : $x_1 \;, x_{n-p+1} \dots\dots x_n$
Alors ;

$$f(x_1 x_2 \dots\dots x_n) = F(x_1 \, y_2 \, y_3 \dots y_{n-p} \, x_{n-p+1} \dots\dots x_n)$$

et l'on aura encore un système jacobien pour F comme pour f.
Calculons les dérivées partielles de F :

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + y_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} + \dots\dots + y_{n-p} \frac{\partial f}{\partial x_{n-p}}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y_2} = \frac{\partial f}{\partial x_2} x_1 \qquad \frac{\partial F}{\partial y_3} = \frac{\partial f}{\partial x_3} x_1 \qquad \dots\dots \qquad \frac{\partial F}{\partial y_{n-p}} = \frac{\partial f}{\partial x_{n-p}} x_1$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_{n-p+1}} = \frac{\partial f}{\partial x_{n-p+1}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{\partial F}{\partial x_n} = \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

Si l'on substitue dans ces relations les valeurs des dérivées partielles de f tirées de l'ancien système, on obtient le nouveau système:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = \Sigma\, a'_{n-p+1} \frac{\partial F}{\partial x_{n-p+1}} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y_2} = x_1 \Sigma\, b_{n-p+1} \frac{\partial F}{\partial x_{n-p+1}}$$

$$\text{-------------------}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y_{n-p}} = x_1 \Sigma\, l_{n-p+1} \frac{\partial F}{\partial x_{n-p+1}}$$

Tel est le système jacobien relatif aux nouvelles variables; les coefficients a', b, ... l sont des fonctions holomorphes de

$x_1\ y_2\ y_3 \ldots\ldots y_{n-p}\ x_{n-p+1} \ldots\ldots x_n$

au voisinage du système origine. — Il ne diffère du précédent qu'en ce que x_1 est facteur dans toutes les dérivées relatives aux y. — Si l'on fait intégrer la 1e équation de ce système, on peut, en vertu de la remarque précédente, faire en sorte que pour $x_1 = 0$, la solution se réduise à une fonction donnée des autres variables, par exemple pour qu'on ait:

$$f_1(x_1\ y_2\ y_3 \ldots\ldots y_{n-p}\ x_{n-p+1} \ldots\ldots x_n) = x_{n-p+1}$$

De même, on pourra trouver une 2e solution de la même équation (1) se réduisant, pour $x_1 = 0$, à x_{n-p+2}

$$f_2(x_1\ y_2\ y_3 \ldots\ldots y_{n-p}\ x_{n-p+1} \ldots\ldots x_n) = x_{n-p+2}$$

et ainsi de suite, jusqu'à une p^e solution se réduisant pour $x_1 = 0$, à x_n :

$$f_p(x_1 y_2 \ldots y_{n-p} x_{n-p+1} \ldots x_n) = x_n.$$

Or la recherche des $(n-1)$ solutions distinctes de l'équation (2) revient à l'intégration du système suivant :

$$\frac{dx_1}{1} = \frac{dy_2}{0} = \frac{dy_3}{0} = \ldots = \frac{dy_{n-p}}{0} = \frac{dx_{n-p+1}}{-a'_{n-p+1}} = \ldots = \frac{dx_n}{-a'_n}$$

Mais nous connaissons $(n-p-1)$ solutions de l'équation (1) ce sont :

$$y_2 = C^{te} \quad y_3 = C^{te} \quad \ldots \quad y_{n-p} = C^{te}$$

puisqu'on a : $dy_2 = 0$ $dy_3 = 0$ $\ldots$ $dy_{n-p} = 0$.

Il reste p équations qui déterminent les p autres solutions : en intégrant ce système de p équations du 1er ordre, on trouvera les solutions : $f_1, f_2, \ldots f_p$ qui se réduisent pour $x_1 = 0$, à : $x_{n-p+1}, x_{n-p+2}, \ldots x_n$.

Toute solution de l'équation (1) sera donc de la forme :

$$\psi(y_2 y_3 \ldots y_{n-p} f_1 f_2 \ldots f_p)$$

fonction des $(n-1)$ solutions distinctes.

Le problème est dès lors résolu ; de la forme générale de la solution de l'équation (1) on déduit immédiatement celle de la solution commune aux p équations du système.

Substituons ψ dans l'équation (2) et faisons $x_1 = 0$; pour que ψ soit une solution commune à (1) et (2) il faut qu'on ait identiquement :

$$\frac{\partial \psi}{\partial y_2} + \frac{\partial \psi}{\partial f_1}\left(\frac{\partial f_1}{\partial y_2}\right)_0 = 0$$

Calculons $\frac{\partial f_1}{\partial y_2}$ pour $x_1 = 0$. Comme y_2 ne dépend pas de x_1,

on peut commencer par annuler x_1 dans f avant de dériver:

or: $f_1(0, y_2, y_3, \dots y_{n-p}, y_{n-p+1} \dots x_n) = x_{n-p+1}$

qui s'annule pour $x_1 = 0$; donc: $\left(\frac{\partial f_1}{\partial y_2}\right)_0 = 0$

et l'on doit avoir identiquement: $\frac{\partial \psi}{\partial y_2} = 0$

ce qui prouve que ψ ne dépend pas de y_2. On montrerait de même que ψ ne dépend pas de $y_3 \dots\dots y_p$. Donc la solution commune aux p équations a pour forme générale:

$$\psi(f_1\ f_2 \dots\dots f_p)$$

et c'est la seule, car nous savons que le système n'admet que p solutions distinctes. On voit qu'elle se réduit, pour $x_1 = 0$, à:

$$\psi(x_{n-p+1}, x_{n-p+2}, \dots\dots x_n)$$

Si donc on peut trouver une solution de cette forme pour l'éq. (1) on sera assuré qu'elle vérifie toutes les autres équations du système, c.à.d qu'elle est une solution commune.

Tout revient à intégrer l'équation (1), c.à.d, p équations du 1er ordre, qui fourniront les p solutions distinctes communes aux équations du système jacobien. Cette méthode ramène le problème à sa plus simple expression; mais la première méthode était nécessaire pour prouver qu'il n'y a que p solutions distinctes, et c'est sur ce résultat que repose la seconde.

— Revenons à l'équation linéaire du 2e ordre, mise sous la forme:

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z}$$

On a vu (page 39) qu'elle équivaut à l'équation aux dérivées partielles:

$$A(f) = X\frac{\partial f}{\partial x} + Y\frac{\partial f}{\partial y} + Z\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

Étant donné une transformation infinitésimale :

$$\delta x = \xi(x,y,z)\,\delta t \qquad \delta y = \eta(x,y,z)\,\delta t \qquad \delta z = \zeta(x,y,z)\,\delta t$$

où ξ, η, ζ ne sont pas proportionnels à X, Y, Z ; si l'on pose :

$$B(f) = \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z}$$

la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation aux dérivées partielles admette cette transformation infinitésimale est que :

$$(A, B) = A(B) - B(A) = \lambda A.$$

λ étant une fonction de x, y, z ; et pour que le groupe fini correspondant :

$$x' = \varphi(x, y, z, t) \qquad y' = \psi(x, y, z, t) \qquad z' = \varpi(x, y, z, t)$$

laisse invariable l'équation, c à d pour que ~~on ait l'identité~~ si $f(x, y, z)$ en est une solution, $f(x' y' z')$ en soit aussi une.

Remarquons que les 2 équations : $A(f) = 0$, $B(f) = 0$ forment un système complet, puisque par hypothèse :

$$(A, B) = \lambda A$$

C'est un système de 2 équations à 3 variables : donc : $p = 1$.
Il y a 1 solution commune aux 2 équations ; et pour la trouver, il suffira d'intégrer 1 équation du 1er ordre. Cette équation fournira donc une solution f_1 de l'équation proposée. Or elle admet 2 solutions distinctes ; pour trouver la seconde f_2, il semble qu'il faille intégrer une autre équation du 1er ordre ; mais on va montrer qu'une quadrature suffit pour achever l'intégration.

Pour cela, substituons à la variable z la variable f_1, en tirant z de l'équation :

$$f_1(x, y, z) = u$$

On sait que toute fonction de f_1 est solution de l'équation proposée ;

or la 2e solution distincte f_2 ne doit pas être fonction de f_1 ou u; donc elle vérifie l'équation :

$$P(x, y, u)\frac{\partial f}{\partial x} + Q(x, y, u)\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

dont le 1er membre est $A(f)$ où l'on a fait : $\frac{\partial f}{\partial u} = 0$.

f_2 est solution de cette équation, où l'on suppose u constante. C'est une équation à 2 variables admettant la transformation infinitésimale : $dx = P_1(x, y, u)\,dt$ $\quad dy = Q_1(x, y, u)\,dt$

P_1, Q_1 étant ce que deviennent ξ, η quand on y remplace z par son expression en fonction de u. On a ainsi :

$$B(f) = P_1(x, y, u)\frac{\partial f}{\partial x} + Q_1(x, y, u)\frac{\partial f}{\partial y}$$

L'équation aux dérivées partielles que vérifie f_2 peut être remplacée par l'équation équivalente du 1er ordre :

$$P(x, y, u)\,dx - Q(x, y, u)\,dy = 0$$

Puisqu'elle admet la transformation infinitésimale précédente, on en connaît un facteur intégrant :
$$\frac{1}{-QQ_1 - PP_1}$$
et par conséquent on peut l'intégrer par une simple quadrature.

En général, une équation différentielle du 2e ordre :

$$y'' = f(x, y, y')$$

qui admet une transformation infinitésimale, peut se ramener à une équation du 1er ordre plus une quadrature : car elle peut être considérée comme un cas particulier du système :

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z}$$

que nous venons de traiter. (C'est le théorème annoncé page 39.)

Ainsi la connaissance d'une transformation infinitésimale qui laisse invariable l'équation du 2e ordre réduit son intégration à celle d'une équation du 1er ordre suivie d'une quadrature. Mais il ne faut pas oublier que l'équation du 2e ordre n'admet pas, en général de transformation infinitésimale.

Nous allons appliquer la méthode précédente à quelques exemples simples et classiques, que la considération des groupes permet de traiter par les mêmes procédés et de réunir sous une seule règle.

Remarque générale. Avant de traiter ces cas particuliers, disons ce qu'on entend par fonctions invariantes ou invariants d'un groupe dont on connaît la transformation infinitésimale.

Soient x', y', z' les variables transformées du groupe fini ; pour qu'une fonction f soit invariante par rapport à ce groupe, il faut qu'on ait identiquement : $f(x', y', z') = f(x, y, z)$

Pour cela, il faut et il suffit que l'on ait identiquement :

$$\frac{\delta f}{\delta t} = 0 \quad \text{ou :} \quad \frac{\partial f}{\partial x}\xi + \frac{\partial f}{\partial y}\eta + \frac{\partial f}{\partial z}\zeta = 0$$

ξ, η, ζ étant les fonctions qui définissent la transformation infinitésimale. Donc les invariants du groupe sont les solutions de l'équation précédente aux dérivées partielles. Dans le cas de 3 variables, il y a 2 solutions distinctes, f_1 f_2 ; alors toute fonction de f_1 et f_2 sera un invariant du groupe.

— Le groupe qui représente la rotation d'une figure dans l'espace autour de l'axe Oz a pour transformation infinitésimale

$$\delta x = y\,\delta t \qquad \delta y = -x\,\delta t \qquad \delta z = 0$$

où : $\xi = y \qquad \eta = -x \qquad \zeta = 0$

Un autre groupe, qui définit les surfaces spirales se déduit du précédent en ajoutant à la rotation une réduction homothétique proportionnelle à dt, par rapport à l'origine : la transformation infinitésimale correspondante est :

$$dx = (y+\lambda x)\,dt \qquad dy = (-x+\lambda y)\,dt \qquad dz = \lambda z\,dt$$

Les surfaces spirales sont les invariants de ce groupe dit spiral ; soient f_1, f_2 les 2 solutions distinctes de l'équation aux dérivées partielles :

$$(y+\lambda x)\frac{\partial f}{\partial x} + (-x+\lambda y)\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda z \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

l'on aura les équations des surfaces spirales en égalant à 0 f_1, f_2 et toute fonction de f_1 et f_2. — L'équation précédente équivaut au système :

$$\frac{dx}{y+\lambda x} = \frac{dy}{-x+\lambda y} = \frac{dz}{\lambda z}$$

ou :

$$\frac{x\,dx+y\,dy}{\lambda(x^2+y^2)} = \frac{x\,dy-y\,dx}{-(x^2+y^2)} = \frac{dz}{\lambda z}$$

qu'on intègre par quadratures : on a d'abord :

$$\frac{dz}{z} = \frac{x\,dx+y\,dy}{x^2+y^2} \qquad \text{d'où :} \quad \log z = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2) + \log C$$

$$z = C\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\frac{dz}{z} = \lambda\,\frac{x\,dy-y\,dx}{-(x^2+y^2)} \qquad \log z = -\lambda \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + C$$

d'où l'équation générale des surfaces spirales :

$$\log z + \lambda \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = F\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

Cette transformation conserve les lignes de la surface, comme il est aisé de le montrer géométriquement. La recherche des lignes de courbure et des lignes asymptotiques est donc ramenée aux quadratures ;

l'équation du 2e ordre des lignes géodésiques admettant une transformation infinitésimale se ramène à une équation du 1er ordre. (Sophus Lie, ap. Mathematische Annalen, tome XX.)

— Considérons l'équation linéaire homogène de la forme :

$$\frac{d^m y}{dx^m} + p_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \cdots\cdots + p_{m-1}\frac{dy}{dx} + p_m y = 0$$

qu'on appelle aussi équation sans second membre.

La propriété fondamentale est la suivante :

Si y_1 en est une solution, $C_1 y_1$ en sera aussi une, car cela revient à multiplier le 1er membre par le facteur constant C_1.

Si donc on a m solutions : $y_1\ y_2 \ldots\ldots y_m$, on aura encore une solution en formant la combinaison linéaire :

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots\cdots + C_m y_m$$

puisque chacun des termes : $C_1 y_1,\ C_2 y_2, \ldots\ldots C_m y_m$ est lui-même une solution. Cette expression, où figurent m constantes arbitraires, sera l'intégrale générale de l'équation linéaire si l'on peut déterminer ces constantes de telle sorte qu'au voisinage de la valeur x_0 (qu'on suppose n'être pas un point singulier pour les coefficients $p_1\ p_2 \ldots p_m$), y et ses $(m-1)$ premières dérivées prennent des valeurs assignées à l'avance ; car on sait que dans ces conditions il n'y a qu'une seule solution possible. — On a en effet pour déterminer $C_1\ C_2 \ldots\ldots C_m$ les m équations suivantes :

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots\cdots + C_m y_m$$

$$\frac{dy}{dx} = C_1\frac{dy_1}{dx} + C_2\frac{dy_2}{dx} + \cdots\cdots + C_m\frac{dy_m}{dx}$$

— — — — — — — — — — — — — —

$$\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} = C_1\frac{d^{m-1}y_1}{dx^{m-1}} + C_2\frac{d^{m-1}y_2}{dx^{m-1}} + \ldots\ldots + C_m\frac{d^{m-1}y_m}{dx^{m-1}}$$

On peut toujours faire en sorte que le déterminant ne soit pas nul :

$$D = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_m \\ \frac{dy_1}{dx} & \frac{dy_2}{dx} & \cdots & \frac{dy_m}{dx} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d^{m-1}y_1}{dx^{m-1}} & \frac{d^{m-1}y_2}{dx^{m-1}} & \cdots & \frac{d^{m-1}y_m}{dx^{m-1}} \end{vmatrix} \gtrless 0$$

car pour $x = x_0$, tous les éléments peuvent recevoir des valeurs arbitraires. On tirera donc $C_1 C_2 \ldots C_m$ des m équations précédentes. Ainsi les m intégrales particulières de l'équation linéaire :

$$y_1 \quad y_2 \ldots\ldots\ldots y_m$$

forment un système fondamental au moyen duquel on peut obtenir toutes les autres solutions par des combinaisons linéaires à coefficients constants.

On sait que les points singuliers des intégrales ne peuvent être que les points singuliers des coefficients $p_1\, p_2 \ldots p_m$, c.à.d. des points singuliers fixes. Or $y_1\, y_2 \ldots\ldots y_m$ étant holomorphes au voisinage du point x_0, l'intégrale générale : $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_m y_m$ sera aussi holomorphe. Les seuls points singuliers des intégrales sont donc ceux où les coefficients cessent d'être uniformes et continus.

Le déterminant précédent, formé de m intégrales particulières et de leurs $(m-1)$ premières dérivées, peut se calculer au moyen des coefficients. Sa valeur ne sera déterminée qu'à un ~~f~~ facteur constant.

près. En effet, soit un autre système fondamental :

$$Y_1 = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots\dots + \alpha_m y_m$$
$$Y_2 = \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \dots\dots + \beta_m y_m$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$Y_m = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \dots\dots + \lambda_m y_m$$

les m nouvelles intégrales particulières étant supposées distinctes, on doit avoir :

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_m \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_m \end{vmatrix} \gtrless 0$$

et si l'on forme leur déterminant, on verra aisément que, en vertu de la règle de multiplication des déterminants, il est identique au produit des 2 déterminants D et Δ, c.à.d. de l'ancien déterminant par une constante non nulle. Les coefficients $\alpha, \beta, \dots \lambda$ étant arbitraires cette constante Δ est elle-même arbitraire.

Puisque le déterminant D (abstraction faite du facteur constant arbitraire) est indépendant du système fondamental choisi, on doit pouvoir l'exprimer en fonction des coefficients. Appelons u cette fonction. On va démontrer que $\frac{du}{dx}$ est représenté par le même déterminant où l'on remplace, à la dernière ligne les dérivées d'ordre $(m-1)$ par les dérivées d'ordre m.

Le théorème étant vrai, comme il est aisé de le vérifier, pour $m=1$, $m=2$ $\left[\frac{d}{dx}|y| = \left|\frac{dy}{dx}\right| \qquad \frac{d}{dx}\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ \frac{dy_1}{dx} & \frac{dy_2}{dx} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ \frac{d^2y_1}{dx^2} & \frac{d^2y_2}{dx^2} \end{vmatrix}\right.$

il suffira de le démontrer pour m, en le supposant vrai pour $(m-1)$.

En effet, supposons le déterminant u développé par rapport aux éléments de la dernière ligne : si l'on prend d'abord les dérivées de ces éléments, on obtient le déterminant annoncé. Si l'on prend ensuite la dérivée de chacun des mineurs, comme le théorème est supposé vrai pour eux, il faudra remplacer dans la dernière ligne de chacun d'eux les dérivées d'ordre $(m-2)$ par les dérivées d'ordre $(m-1)$, ce qui revient à rendre, dans le déterminant D, les éléments de l'avant-dernière ligne égaux aux éléments correspondants de la dernière ; le résultat sera donc nul. Il restera donc simplement :

$$\frac{du}{dx} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_m \\ \frac{dy_1}{dx} & \frac{dy_2}{dx} & \cdots & \frac{dy_m}{dx} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d^{m-2}y_1}{dx^{m-2}} & \frac{d^{m-2}y_2}{dx^{m-2}} & \cdots & \frac{d^{m-2}y_m}{dx^{m-2}} \\ \frac{d^m y_1}{dx^m} & \frac{d^m y_2}{dx^m} & \cdots & \frac{d^m y_m}{dx^m} \end{vmatrix}$$

Or on a, $y_1\, y_2 \ldots y_m$ étant des solutions de l'équation :

$$\frac{d^m y_1}{dx^m} = -p_1 \frac{d^{m-1}y_1}{dx^{m-1}} - p_2 \frac{d^{m-2}y_1}{dx^{m-2}} - \cdots - p_{m-1}\frac{dy_1}{dx} - p_m y_1$$

et de même pour les autres. Si l'on substitue ces expressions dans le déterminant, tous les termes qui suivent le 1er disparaissent comme proportionnels aux termes correspondants des autres lignes ; il reste à la dernière ligne les éléments suivants :

$$-p_1 \frac{d^{m-1}y_1}{dx^{m-1}}, \quad -p_1 \frac{d^{m-1}y_2}{dx^{m-1}}, \quad \cdots \cdots \quad -p_1 \frac{d^{m-1}y_m}{dx^{m-1}}$$

Le facteur commun $-p_1$ multiplie tout le déterminant ; on a donc

$$\frac{du}{dx} = -p_1 u \qquad \text{d'où} \qquad u = Ce^{-\int p_1 dx}$$

On voit que la valeur du déterminant D est bien connue, à un facteur constant près, en fonction du 1er coefficient p_1.

— Si le déterminant D est identiquement nul, pour un certain système fondamental $y_1\ y_2 \ldots\ y_m$, on a une relation de la forme :
$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots\ldots + C_m y_m = 0$$
$C_1\ C_2 \ldots\ C_m$ étant des coefficients constants.

Supposons que le mineur qui contient $y_1\ y_2 \ldots y_{m-1}$ ne soit pas nul : on peut former une équation linéaire ayant ces $(m-1)$ intégrales pour système fondamental :
$$\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + p_1 \frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} + \ldots\ldots + p_{m-2}\frac{dy}{dx} + p_{m-1}\, y = 0$$
$y_1\ y_2 \ldots y_{m-1}$ en sont des solutions ; mais y_m en est aussi une, donc y_m est une combinaison linéaire de $y_1\ y_2 \ldots\ y_{m-1}$ à coefficients constants, c. q. f. d.

— Nous allons maintenant donner une idée de la théorie de l'équation linéaire homogène conçue par Lagrange. Il met cette équation sous la forme :
$$Ly + M\frac{dy}{dx} + N\frac{d^2y}{dx^2} + \ldots\ldots\ldots + S\frac{d^m y}{dx^m} = 0 \qquad (1)$$
Il faut définir ce qu'il appelle l'équation adjointe de cette équation. Soit z une fonction de x ; multiplions l'équation par $z\,dx$ et intégrons ; on a encore :
$$\int\left(Lzy + Mz\frac{dy}{dx} + Nz\frac{d^2y}{dx^2} + \ldots\ldots + Sz\frac{d^m y}{dx^m}\right)dx = 0$$
Intégrons par parties chaque terme de la parenthèse :
$$\int Lzy\, dx \qquad \text{restera la même}$$

$$\int Mz \frac{dy}{dx} dx = Mzy - \int y \frac{d(Mz)}{dx} dx$$

$$\int Nz \frac{d^2y}{dx^2} dx = Nz \frac{dy}{dx} - y \frac{d(Nz)}{dx} + \int y \frac{d^2(Nz)}{dx^2} dx$$

— — — — — — — — — — — — — — — — —

$$\int Sz \frac{d^m y}{dx^m} dx = Sz \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} - \frac{d(Sz)}{dx} \frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} + \dots \pm \int y \frac{d^m(Sz)}{dx^m} dx$$

La partie non intégrée peut se réunir en une seule intégrale :

$$\int y \left[Lz - \frac{d(Mz)}{dx} + \frac{d^2(Nz)}{dx^2} - \dots\dots \pm \frac{d^m(Sz)}{dx^m} \right] dx$$

La partie intégrée est une fonction linéaire de y et de ses $(m-1)$ premières dérivées. Choisissons z de façon à annuler la partie ~~non~~ intégrée, c.à.d le crochet qui figure dans l'intégrale précédente :

$$Lz - \frac{d(Mz)}{dx} + \frac{d^2(Nz)}{dx^2} - \dots\dots \pm \frac{d^m(Sz)}{dx^m} = 0 \qquad (2)$$

Cette nouvelle équation est l'équation adjointe à l'équation (1). On voit que si l'on sait l'intégrer on pourra intégrer la première. En effet, la partie intégrée, égalée à 0, fournira une équation linéaire en $y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots\dots \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}$. En y substituant successivement m solutions distinctes de l'équation (2) en z, on aura m équations algébriques qui détermineront $y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots\dots \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}$, puisque le déterminant de ces équations n'est pas nul.

On vérifie sans peine que l'équation (1) est, réciproquement, l'adjointe de l'équation (2.)

Jacobi présente la théorie sous une autre forme. Il considère

un système de m équations linéaires du 1er ordre à m fonctions inconnues:

$$(1)\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots\cdots + a_{1m}y_m \\ \frac{dy_2}{dx} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots\cdots + a_{2m}y_m \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{dy_m}{dx} = a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \cdots\cdots + a_{mm}y_m \end{cases}$$

les coefficients a étant des fonctions de x.

Soit un 1er système d'intégrales formant une solution du système (1):

$$y_1^1 \quad y_2^1 \cdots\cdots y_m^1$$

un 2e: $$y_1^2 \quad y_2^2 \cdots\cdots y_m^2$$

---

un me: $$y_1^m \quad y_2^m \cdots\cdots y_m^m$$

Toute solution du système (1) sera un ensemble d'intégrales de la forme:

$$\begin{cases} y_1 = C_1y_1^1 + C_2y_2^1 + \cdots\cdots + C_my_m^1 \\ y_2 = C_1y_1^2 + C_2y_2^2 + \cdots\cdots + C_my_m^2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ y_m = C_1y_1^m + C_2y_2^m + \cdots\cdots + C_my_m^m \end{cases}$$

Ce sera la forme de la solution générale du système (1), pourvu que le déterminant des y ne soit pas identiquement nul, ce qu'on peut toujours obtenir, puisqu'on dispose arbitrairement des valeurs des intégrales particulières pour $x = x_0$.

Toute équation linéaire d'ordre m peut se mettre sous la forme d'un système de m équations linéaires du 1er ordre, en posant:

$$(1_1)\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_2 \qquad \dfrac{dy_2}{dx} = y_3 \quad \cdots\cdots\cdots \quad \dfrac{dy_{m-1}}{dx} = y_m \\ \dfrac{dy_m}{dx} = p_1 y_m + p_2 y_{m-1} + \cdots\cdots + p_m y_1 \end{cases}$$

ce qui équivaut évidemment à l'équation linéaire d'ordre m :

$$(\lambda) \qquad \frac{d^m y}{dx^m} = p_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + p_2 \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \cdots\cdots + p_m y$$

Revenons au système général (1.) Le système adjoint sera :

$$(2)\begin{cases} \dfrac{du_1}{dx} = -a_{11} u_1 - a_{21} u_2 - \cdots\cdots - a_{m1} u_m \\ \dfrac{du_2}{dx} = -a_{12} u_1 - a_{22} u_2 - \cdots\cdots - a_{m2} u_m \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{du_m}{dx} = -a_{1m} u_1 - a_{2m} u_2 - \cdots\cdots - a_{mm} u_m \end{cases}$$

et réciproquement, le système (1) sera l'adjoint du système (2).

On a alors entre les y et les u la relation :

$$u_1 y_1 + u_2 y_2 + \cdots\cdots + u_m y_m = C^{te}$$

Il suffit de calculer la dérivée du 1er membre :

$$\frac{d}{dx}(u_1 y_1 + u_2 y_2 + \cdots\cdots + u_m y_m) =$$

$$u_1(a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + \cdots\cdots + a_{1m} y_m) - y_1(a_{11} u_1 + a_{21} u_2 + \cdots + a_{m1} u_m)$$
$$+ u_2(a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + \cdots\cdots + a_{2m} y_m) - y_2(a_{12} u_1 + a_{22} u_2 + \cdots + a_{m2} u_m)$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ u_m(a_{m1} y_1 + a_{m2} y_2 + \cdots\cdots + a_{mm} y_m) - y_m(a_{1m} u_1 + a_{2m} u_2 + \cdots + a_{mm} u_m)$$

Tous les termes du 2e membre se détruisent deux à deux ; la dérivée est donc nulle, ce qui démontre la relation annoncée.

Pour exprimer les u en fonction des y, il suffit de prendre m systèmes de y formant m solutions distinctes du système (I), et d'écrire les équations :

$$u_1 y_1^1 + u_2 y_2^1 + \dots + u_m y_m^1 = C_1$$
$$u_1 y_1^2 + u_2 y_2^2 + \dots + u_m y_m^2 = C_2$$
$$\text{— — — — — — — — — — — —}$$
$$u_1 y_1^m + u_2 y_2^m + \dots + u_m y_m^m = C_m$$

Le déterminant de ces équations est différent de 0, les m solutions étant supposées distinctes ; donc on pourra les résoudre et en tirer $u_1\, u_2 \dots u_m$ en fonction des y.

Inversement, en prenant m systèmes de u on exprimerait les y en fonction des u.

Pour le système particulier (I_1) qui équivaut à l'équation linéaire, le système adjoint sera :

$$\frac{du_1}{dx} = -p_1 u_m \qquad \frac{du_2}{dx} = -p_2 u_m \quad \dots\dots \quad \frac{du_m}{dx} = -u_{m-1} - p_m u_m$$

et l'équation qui donnera u_m et qu'on déduira de ce système sera l'équation adjointe de l'équation linéaire proposée (λ).

— Nous allons donner quelques exemples d'intégration d'équations linéaires de forme particulière.

Euler a intégré les équations linéaires à coefficients constants. Laplace a traité le problème plus général (dont le précédent n'est qu'un cas particulier) de l'équation linéaire dont les coefficients sont des binômes du 1er degré en x, c.à.d. de la forme suivante :

$$(a_0 x + b_0)\frac{d^m y}{dx^m} + (a_1 x + b_1)\frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \dots + (a_m x + b_m) y = 0.$$

Laplace cherche une intégrale de la forme :

$$y = \int_\alpha^\beta V(z) e^{zx} dz$$

Il faut choisir la fonction $V(z)$ et les 2 constantes α et β de façon que y soit une solution de l'équation. Or on a :

$$\frac{dy}{dx} = \int_\alpha^\beta z V e^{zx} dz \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \int_\alpha^\beta z^2 V e^{zx} dz \quad \ldots\ldots \quad \frac{d^m y}{dx^m} = \int_\alpha^\beta z^m V e^{zx} dz$$

On a aussi les produits : xy, $x\frac{dy}{dx}$, $x\frac{d^2y}{dx^2}$, ... $x\frac{d^m y}{dx^m}$.

$$xy = \int_\alpha^\beta V x e^{zx} dz = \Big[V e^{zx}\Big]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta \frac{dV}{dz} e^{zx} dz$$

$$x\frac{dy}{dx} = \Big[V z e^{zx}\Big]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta \frac{d(Vz)}{dz} e^{zx} dz \quad \ldots\ldots$$

$$x\frac{d^m y}{dx^m} = \Big[V z^m e^{zx}\Big]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta \frac{d(Vz^m)}{dz} e^{zx} dz$$

Supposons que les parties intégrées s'annulent, c.à.d. que :

$$\Big[V z^i e^{zx}\Big]_\alpha^\beta = 0 \qquad i = 0, 1, 2, 3 \ldots\ldots m.$$

Réunissons les parties non intégrées en une seule intégrale ; on aura :

$$\int_\alpha^\beta e^{zx}\Big[-a_0 \frac{d(Vz^m)}{dz} + b_0 V z^m - a_1 \frac{d(Vz^{m-1})}{dz} + b_1 V z^{m-1} - \ldots\ldots\Big] dz = 0$$

pour nouvelle forme de l'équation. Elle sera vérifiée si l'on annule le crochet, ce qui donne une équation linéaire du 1er ordre en V :

$$V.P(z) + \frac{dV}{dz}.Q(z) = 0$$

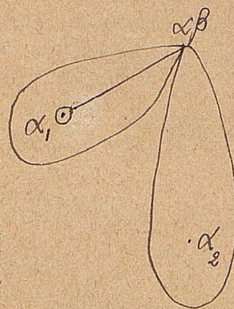
P et Q étant des polynômes en z. On aura V par une quadrature :

$$\frac{dV}{V} = -\frac{P(z)}{Q(z)}dz = \left[\mu + \frac{\lambda_1}{z-\alpha_1} + \frac{\lambda_2}{z-\alpha_2} + \dots + \frac{\lambda_n}{z-\alpha_n}\right]dz$$

d'où : $V = e^{\mu z} . (z-\alpha_1)^{\lambda_1} . (z-\alpha_2)^{\lambda_2} \dots\dots (z-\alpha_m)^{\lambda_m}$

Il reste à déterminer quelles limites α et β il faut prendre, et quel chemin (dans le cas général où z est imaginaire) il faut suivre pour que : $\int_\alpha^\beta V e^{zx} dz$ ~~soit~~ étant une intégrale ~~et pour qu~~ on ait en même temps $\left[V z^i e^{zx}\right]_\alpha^\beta = 0$ $i = 0, 1, 2, \dots m$.

Marquons dans le plan des z les points critiques $\alpha_1\ \alpha_2 \dots \alpha_m$ de la fonction V. Prenons pour α et β un même point du plan, de sorte que le chemin suivi soit un contour fermé. Si le contour n'enferme aucun point critique, la valeur de V étant la même à l'arrivée qu'au départ, la différence $\left[V z^i e^{zx}\right]_\alpha^\beta$ sera évidemment nulle. Décrivons un circuit autour du point α_1, et revenons en α, nous aurons une valeur de V différente de la valeur initiale ; décrivons ensuite un autre circuit autour de α_2, dans le même sens ; on obtient une nouvelle valeur de V. Revenu en α,



décrivons le 1er circuit en sens inverse, puis le 2e aussi en sens inverse : on retrouvera finalement la valeur initiale de V. En effet, ~~dans~~ après le 1er circuit, le facteur $(z-\alpha_1)^{\lambda_1}$ se trouve multiplié par $e^{2\pi i \lambda_1}$;

après le 2e, le facteur $(z-\alpha_2)^{\lambda_2}$ est multiplié par $e^{2\pi i\lambda_2}$; en suivant le 1er ~~lacet~~ circuit en sens contraire, on multiplie V par $e^{-2\pi i\lambda_1}$, puis, en suivant le 2e ~~lacet~~ circuit, par $e^{-2\pi i\lambda_2}$; ces 4 facteurs se détruisant deux à deux, la valeur finale et la valeur initiale de V sont identiques. On peut donc prendre pour contour d'intégration l'ensemble de ces 2 ~~lacets~~ circuits inverses l'un de l'autre.

Soit A_1 la valeur de l'intégrale prise sur le 1er ~~lacet~~ circuit (α_1) dans le sens positif; A_2 la valeur de la même intégrale prise sur le 2e circuit dans le même sens, en supposant la valeur initiale identique (ou nulle). En décrivant le 1er ~~lacet~~ circuit on obtient A_1; puis on décrit le 2e: comme la valeur initiale et tous les éléments de l'intégrale ~~se trouvent~~ multipliés par $e^{2\pi i\lambda_1}$ de V après le 1er circuit, on obtient:
$$A^2 e^{2\pi i\lambda_1}.$$
Après ce 2e circuit, la valeur initiale se trouve multipliée par: $e^{2\pi i(\lambda_1+\lambda_2)}$ et comme on décrit le 1er circuit dans le sens négatif il donne: $-A_1 e^{2\pi i(\lambda_1+\lambda_2)}$

Après ce 3e circuit, la valeur initiale est multipliée par:
$$e^{2\pi i\lambda_1}\cdot e^{2\pi i\lambda_2}\cdot e^{-2\pi i\lambda_1} = e^{2\pi i\lambda_2}$$
et le 2e circuit, décrit dans le sens négatif, donne: $-A_2 e^{2\pi i\lambda_2}$

L'intégrale prise sur le contour total est la somme:
$$A_1\left(1-e^{2\pi i(\lambda_1+\lambda_2)}\right) + A_2\left(e^{2\pi i\lambda_1} - e^{2\pi i\lambda_2}\right)$$

Supposons que pour $z=\alpha_1$ l'intégrale ait un sens; on pourra remplacer le 1er circuit par le lacet $\alpha\alpha_1$; ce lacet se compose de $\alpha\alpha_1$, d'un cercle infiniment petit autour de α_1, et de $\alpha_1\alpha$

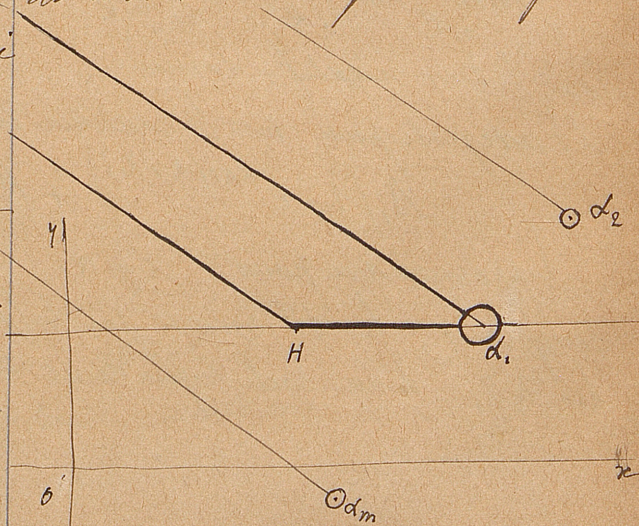
L'intégrale prise sur le cercle est nulle, mais la valeur de V, après la rotation de 2π autour de α_1, se trouve multipliée par : $e^{2\pi i \lambda_1}$; soit $(\alpha\alpha_1)$ la valeur de l'intégrale prise de α à α_1 ; comme elle est prise en sens inverse au retour, elle devient négative et l'on a finalement : $A_1 = (\alpha\alpha_1)(1 - e^{2\pi i \lambda_1})$

– En combinant de même le circuit α_1 avec les circuits $\alpha_2 \dots \alpha_m$, on obtiendrait $(m-1)$ autres solutions distinctes de l'équation, et on n'en aurait pas davantage car toute autre combinaison de circuits équivaudrait à une somme ou à une différence des résultats déjà obtenus. L'équation admet donc $(m-1)$ intégrales holomorphes ; elle sera alors résolue, car on pourra trouver son intégrale générale par des quadratures (en admettant que les $(m-1)$ solutions soient distinctes.)

Une autre méthode va nous permettre de trouver m intégrales non holomorphes de la même équation.

Supposons, pour simplifier la question, que μ est réel, et que les exposants λ sont positifs ou du moins ont leur partie réelle positive.

Prenons le point α, β à l'infini du côté des x négatifs, et décrivons un chemin d'intégration fermé n'entourant qu'un seul point critique, α_1 par exemple. Ce circuit équivaut au lacet (∞, α_1) c.à.d. à une droite double allant de α_1 à l'infini.



Il faut savoir si l'intégrale prise jusqu'à $z=-\infty$ a un sens.
Supposons x réel et positif, et assez grand pour que l'on ait :
$x+\mu=\xi>0$. x pourra devenir infini positif.
On aura :
$$y=\int_\alpha^\beta e^{z(x+\mu)}(z-\alpha_1)^{\lambda_1}(z-\alpha_2)^{\lambda_2}\ldots\ldots(z-\alpha_m)^{\lambda_m}dz$$
α et β étant infinis négatifs. Or : $\int e^{z(x+\mu)}dz$
a un sens pour $z=-\infty$. D'autre part :
$Vz'e^{zx}=0$ pour $z=-\infty$, car z disparaît en présence des exponentielles infiniment petites : La condition :
$\left[Vz'e^{zx}\right]_\alpha^\beta=0$ sera donc toujours remplie.
L'intégrale prise suivant le lacet infini a donc un sens.
On aura ainsi une intégrale pour chaque point critique. Mais ce ne seront pas des fonctions holomorphes de x : leur valeur dépendra de la nature des valeurs attribuées à x. Ces m intégrales peuvent servir à construire l'intégrale générale, car on va prouver qu'elles sont linéairement indépendantes.
Appelons $I_1, I_2, \ldots I_m$ les m intégrales relatives aux m lacets $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m$. Considérons $I_1=\int e^{\xi z}(z-\alpha_1)^{\lambda_1}(z-\alpha_2)^{\lambda_2}\ldots\ldots(z-\alpha_m)^{\lambda_m}dz$
intégrale prise suivant le lacet α_1. Cherchons ce que devient cette intégrale quand x, c.à.d. ξ, croît indéfiniment.
Menons par le p. α_1 une parallèle à Ox, et prenons α_1 pour nouvelle origine en faisant le changement de variable : $z-\alpha_1=z'$.

Les $(m-1)$ autres facteurs binômes de V forment par leur produit un polynôme de degré $(m-1)$ en z', c.à.d. une fonction holomorphe (au voisinage de $z'=0$) $P(z')$:

$$I_1 = e^{\xi \alpha_1} \int e^{\xi z'} z'^{\lambda_1} P(z')\, dz'$$

Menons une parallèle au lacet L_1 terminée à $\alpha_1 x'$ en H, et formons le nouveau lacet : $\infty H \alpha_1$; posons : $\alpha_1 H = -a$

Quand x augmente indéfiniment, l'intégrale prise sur la demi droite infinie ∞H tend vers 0. Pour connaître la valeur de I_1 pour $x=\infty$, il suffit de trouver la limite, pour $x=\infty$, de l'intégrale obtenue en décrivant le lacet fini : $H\alpha_1$, c.à.d.

$$\lim_{x=\infty} \left[e^{\xi \alpha_1} (1 - e^{2\pi i \lambda_1}) \int_{-a}^{0} e^{\xi z'} z'^{\lambda_1} P(z')\, dz' \right] = \lim J_1 = I_1$$

Posons : $\xi z' = -z''$: les limites seront : ξa et 0.

$$e^{-\xi \alpha_1} J_1 = e^{\pi i \lambda_1} \int_{\xi a}^{0} e^{-z''} \frac{z''^{\lambda_1}}{\xi^{\lambda_1+1}} P\left(\frac{z''}{\xi}\right) dz''$$

Soit A le terme indépendant de P ; faisons croître x (ou ξ) indéfiniment :

$$\lim_{x=\infty} \xi^{\lambda_1+1} e^{-\xi \alpha_1} J_1 = e^{\pi i \lambda_1} \int_{\infty}^{0} e^{-z''} z''^{\lambda_1} A\, dz'' = -A e^{\pi i \lambda_1} \Gamma(\lambda_1+1)$$

Or $\Gamma(\lambda_1+1)$ est une quantité finie non nulle ; donc on a enfin ce résultat général :

$$\lim_{x=\infty} \xi^{\lambda_1+1} e^{-\xi \alpha_1} J_1 = B_1 \gtrless 0.$$

Cela établi, nous allons prouver que les m intégrales $I_1\, I_2 \ldots I_m$

sont linéairement indépendantes, c.à.d. qu'il ne peut exister une relation de la forme : $P_1 I_1 + P_2 I_2 + \dots + P_m I_m = 0.$

Supposons que $\alpha_1\ \alpha_2 \dots \alpha_m$ soient rangés dans l'ordre de leurs parties réelles décroissantes. Multiplions la relation hypothétique qui précède par : $\xi^{\lambda_1+1} e^{-\xi\alpha_1}$ et faisons tendre ξ vers ∞.

Le 1er terme, $P_1 I_1$, tendra vers $P_1 B_1$. Les autres s'annuleront, car on a :

$$\lim_{\xi=\infty} \xi^{\lambda_2+1} e^{-\xi\alpha_2} J_2 = B_2$$

Multiplions les 2 membres par : $\xi^{\lambda_1-\lambda_2} e^{\xi(\alpha_2-\alpha_1)}$

On aura :

$$\xi^{\lambda_1+1} e^{-\xi\alpha_1} I_2 = B_2\, \xi^{\lambda_1-\lambda_2} e^{\xi(\alpha_2-\alpha_1)}$$

Or $\alpha_2-\alpha_1 < 0$ au moins par sa partie réelle ; donc $e^{\xi(\alpha_2-\alpha_1)}$ est infiniment petit, et l'emporte sur $\xi^{\lambda_1-\lambda_2}$, on aura en général ;

$$\lim \xi^{\lambda_1+1} e^{-\xi\alpha_1} I_i = 0 \qquad i = 2, 3, \dots m$$

Il reste l'égalité ; $P_1 B_1 = 0$ Or $B_1 \gtrless 0$ Donc : $P_1 = 0$.

On prouverait de même : $P_2 = 0 \dots\dots\dots P_m = 0$, ce qui signifie que la relation supposée n'existe pas.

— Appliquons la méthode précédente au cas très particulier de l'équation linéaire à coefficients constants :

$$a_0 \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots\dots + a_{n-1}\frac{dy}{dx} + a_n y = 0$$

Il faut chercher une intégrale de la forme : $y = \int_\alpha^\beta V e^{zx} dz$

dont les dérivées sont :

$$\frac{dy}{dx} = \int_\alpha^\beta V z e^{zx} dz \quad \dots\dots \quad \frac{d^n y}{dx^n} = \int_\alpha^\beta V z^n e^{zx} dz$$

Substituons ces expressions dans l'équation linéaire ; elle deviendra

$$\int_\alpha^\beta V f(z) e^{zx} dz = 0 \qquad \text{en posant :} \quad f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$$

Prenons un contour fermé allant de α en β, les 2 points étant confondus. Si V est holomorphe à l'intérieur de ce contour, l'intégrale :

$$\int_\alpha^\beta V e^{zx} dz \quad \text{sera nulle.}$$

(Posons : $V f(z) = \varphi z$ d'où : $V = \dfrac{\varphi(z)}{f(z)}$.)

Si au contraire le contour contient des points critiques de V, c.à.d des racines de $f(z)$, l'intégrale prendra une certaine valeur.

Soit α_1 une racine multiple de degré p de $f(z)$: $\dfrac{\varphi(z)}{f(z)}$ peut se développer au voisinage du pôle α_1 en une série de la forme :

$$\frac{A_1}{(z-\alpha_1)^p} + \frac{A_2}{(z-\alpha_1)^{p-1}} + \dots\dots + \frac{A_p}{z-\alpha_1} + \dots$$

D'autre part, on peut développer e^{zx} comme suit :

$$e^{zx} = e^{(z-\alpha_1)x} \cdot e^{\alpha_1 x} = e^{\alpha_1 x}\left[1 + (z-\alpha_1)x + \dots\dots + \frac{(z-\alpha_1)^p x^p}{p!} + \dots\right]$$

Le résidu de $\dfrac{\varphi(z)}{f(z)} e^{zx}$ relatif au pôle α_1 est le coefficient du terme en $\dfrac{1}{z-\alpha_1}$ dans le développement : c'est le produit de $e^{\alpha_1 x}$ et d'un polynôme de degré $(p-1)$ en x, de la forme :

$$e^{\alpha_1 x}\left(C_1 x^{p-1} + C_2 x^{p-2} + \dots + C_{p-1} x + C_p\right)$$

C'est l'intégrale qui correspond à chaque racine, p étant son degré de multiplicité : elle contient p constantes arbitraires.

On peut se demander si l'on obtient ainsi l'intégrale générale de l'équation différentielle, ~~si l'on~~ quand on prend pour $\varphi(z)$ un polynome arbitraire de degré $(n-1)$, et pour contour d'intégration une courbe fermée enveloppant toutes les racines de $f(z)$.

Cela n'est évident que si les n racines sont distinctes, i.e. si $f(z)$ n'a que des racines simples. Mais on peut le démontrer pour le cas général de la manière suivante:

Prenons pour contour d'intégration C un cercle de centre O et d'un rayon assez grand pour enfermer toutes les racines de $f(z)$. On pourra développer V à l'extérieur de ce cercle sous la forme:

$$\frac{\varphi(z)}{f(z)} = \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \cdots\cdots + \frac{A_n}{z^n}$$

Si $\varphi(z)$ est donné arbitrairement, les A sont déterminés; si au contraire les A sont arbitraires, on connaîtra les coefficients de $\varphi(z)$ par des équations successives du 1er degré, toutes résolubles. On aura, pour $x=0$, les valeurs suivantes:

$$y = \int \frac{\varphi(z)}{f(z)}\,dz \qquad \frac{dy}{dx} = \int z\,\frac{\varphi(z)}{f(z)}\,dz \;\cdots\cdots\; \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \int z^{n-1}\,\frac{\varphi(z)}{f(z)}\,dz$$

Dans y, le terme en $\frac{1}{z}$ a pour coefficient A_1, donc en intégrant, on aura la valeur $2\pi i.A_1$. — En intégrant $z\frac{\varphi(z)}{f(z)}$ dont le résidu est A_2, on aura pour $\frac{dy}{dx}$ la valeur $2\pi i.A_2$; et ainsi de suite; on obtient pour $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$ la valeur $2\pi i A_n$. —

On a ainsi ~~le~~ un système fondamental de l'équation proposée, et par suite son intégrale générale.

Ce résultat peut se généraliser, et s'applique à un système d'équations linéaires du 1er ordre à coefficients constants :

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + \cdots + a_{1n} y_n \\ \dfrac{dy_2}{dx} = a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + \cdots + a_{2n} y_n \\ \text{---------} \\ \dfrac{dy_n}{dx} = a_{n1} y_1 + a_{n2} y_2 + \cdots + a_{nn} y_n \end{cases}$$

Choisissons n intégrales de la forme :

$$y_1 = \int V_1 e^{zx} dz \qquad y_2 = \int V_2 e^{zx} dz \quad \cdots\cdots \quad y_n = \int V_n e^{zx} dz$$

$V_1\, V_2 \ldots V_n$ étant des fonctions de z, et les intégrales étant prises suivant le même contour. Les équations du système deviendront :

$$\int_C \left[(a_{11} - z) V_1 + a_{12} V_2 + \cdots + a_{1n} V_n \right] e^{zx} dz = 0$$

$$\int_C \left[a_{21} V_1 + (a_{22} - z) V_2 + \cdots + a_{2n} V_n \right] e^{zx} dz = 0$$

$$\text{---------}$$

$$\int_C \left[a_{n1} V_1 + a_{n2} V_2 + \cdots + (a_{nn} - z) V_n \right] e^{zx} dz = 0$$

On posera ensuite les équations suivantes :

$$(a_{11} - z) V_1 + a_{12} V_2 + \cdots + a_{1n} V_n = P_1(z)$$

$$a_{21} V_1 + (a_{22} - z) V_2 + \cdots + a_{2n} V_n = P_2(z)$$

$$\text{---------}$$

$$a_{n1} V_1 + a_{n2} V_2 + \cdots + (a_{nn} - z) V_n = P_n(z)$$

$P_1\, P_2 \ldots P_n$ étant des polynômes en z. On pourra les prendre

tous nuls sauf P_1 ; on aura $V_1, V_2 \ldots\ldots V_n$ en résolvant les équations précédentes :

$$V_1 = \frac{\psi_1(z)}{f(z)} P_1(z) \qquad V_2 = \frac{\psi_2(z)}{f(z)} P_1(z) \ldots\ldots \qquad V_n = \frac{\psi_n(z)}{f(z)} P_1(z)$$

$f(z)$ étant le déterminant des équations, c.à.d. un polynôme de degré n en z. Ce sont les racines du polynôme $P_1(z)$ qui joueront le rôle essentiel dans l'intégrale générale du système. On pourra choisir les coefficients de telle façon que pour $x = 0$, $y_1\, y_2 \ldots\ldots y_n$ prennent des valeurs assignées d'avance.

Considérons en particulier, avec Jacobi, un système de 3 équations linéaires du 1er ordre à coefficients constants :

$$\frac{du}{dt} = au + bv + cw$$
$$\frac{dv}{dt} = a'u + b'v + c'w$$
$$\frac{dw}{dt} = a''u + b''v + c''w$$

En les intégrant dans le cas le plus général, on trouve 3 solutions distinctes :

$$\begin{cases} u = \lambda_1 e^{\alpha_1 t} \\ v = \mu_1 e^{\alpha_1 t} \\ w = \nu_1 e^{\alpha_1 t} \end{cases} \qquad \begin{cases} u = \lambda_2 e^{\alpha_2 t} \\ v = \mu_2 e^{\alpha_2 t} \\ w = \nu_2 e^{\alpha_2 t} \end{cases} \qquad \begin{cases} u = \lambda_3 e^{\alpha_3 t} \\ v = \mu_3 e^{\alpha_3 t} \\ w = \nu_3 e^{\alpha_3 t} \end{cases}$$

L'intégrale générale du système proposé sera donc :

$$\begin{cases} u = A_1\lambda_1 e^{\alpha_1 t} + A_2\lambda_2 e^{\alpha_2 t} + A_3\lambda_3 e^{\alpha_3 t} \\ v = A_1\mu_1 e^{\alpha_1 t} + A_2\mu_2 e^{\alpha_2 t} + A_3\mu_3 e^{\alpha_3 t} \\ w = A_1\nu_1 e^{\alpha_1 t} + A_2\nu_2 e^{\alpha_2 t} + A_3\nu_3 e^{\alpha_3 t} \end{cases}$$

Posons : $x = \frac{u}{w}$, $y = \frac{v}{w}$

Si l'on substitue dans ces formules les valeurs de u, v, w, on aura x et y sous la forme de fractions dont les termes seront des polynômes du 1er degré en : $\frac{A_2}{A_1} e^{(\alpha_2-\alpha_1)t}$, $\frac{A_3}{A_1} e^{(\alpha_3-\alpha_1)t}$

Si l'on résout alors ces 2 équations par rapport à ces 2 quantités, on aura leur expression en fractions linéaires en x, y :

$$\frac{A_2}{A_1} e^{(\alpha_2-\alpha_1)t} = \frac{Mx+Ny+P}{M''x+N''y+P''} \qquad \frac{A_3}{A_1} e^{(\alpha_3-\alpha_1)t} = \frac{M'x+N'y+P'}{M''x+N''y+P''}$$

Pour obtenir une relation entre x et y, on éliminera les exponentielles par une élévation aux puissances et on trouvera :

$$\left(\frac{Mx+Ny+P}{M''x+N''y+P''}\right)^{\alpha_3-\alpha_1} : \left(\frac{M'x+N'y+P'}{M''x+N''y+P''}\right)^{\alpha_2-\alpha_1} = C^{te}$$

ou : $$(Mx+Ny+P)^{\alpha_3-\alpha_1} \cdot (M'x+N'y+P')^{\alpha_1-\alpha_2} \cdot (M''x+N''y+P'')^{\alpha_2-\alpha_3} = C^{te}$$

Puisque cette relation entre x et y ne dépend que d'une constante, elle est l'intégrale générale d'une équation différentielle du 1er ordre :

$$dx = \frac{w\,du - u\,dw}{w^2} \qquad dy = \frac{w\,dv - v\,dw}{w^2} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{w\,dv - v\,dw}{w\,du - u\,dw}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{w(a'u+b'v+c'w) - v(a''u+b''v+c''w)}{w(au+bv+cw) - u(a''u+b''v+c''w)} \qquad \text{ou :}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a'x+b'y+c' - y(a''x+b''y+c'')}{ax+by+c - x(a''x+b''y+c'')}$$

équation du 1er ordre qui contient un terme en dx, un terme en dy, et un terme en $(x\,dy - y\,dx)$.

$(a'x+b'y+c')dx - (ax+by+c)dy + (a''x+b''y+c'')(xdy-ydx) = 0.$
dont l'intégrale générale a la forme précédemment trouvée.
Pour avoir $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, on devra résoudre l'équation caractéristique de cette équation différentielle, qui est du 3e ordre en α:

$$\begin{vmatrix} a-\alpha & b & c \\ a' & b'-\alpha & c' \\ a'' & b'' & c''-\alpha \end{vmatrix} = 0$$

On a ainsi transformé un système de 3 équations linéaires à 3 fonctions inconnues en une équation du 1er ordre (équation de Jacobi)

Avant d'aborder l'étude de l'équation linéaire hypergéométrique, définissons ce qu'on entend par groupe d'une équation linéaire.
Soit une équation linéaire à coefficients quelconques supposons que l'on ait réduit à 1 celui du 1er terme. On sait que les points singuliers de ses intégrales sont déterminés et fixes dans le plan parce que ce sont les points singuliers des coefficients. Considérons dans le plan un point x qui ne soit pas point singulier des coefficients; soit $y_1 y_2 \dots y_n$ un système fondamental d'intégrales relatives à ce point. Si l'on part de x et qu'on y revienne après avoir fait un tour autour du point critique α_1, on aura d'autres intégrales $Y_1 Y_2 \dots Y_n$ formant un autre système fondamental. Ce seront des combinaisons linéaires à coefficients constants des premières:

$$S_1 \begin{cases} Y_1 = a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + \dots\dots + a_{1n} y_n \\ Y_2 = a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + \dots\dots + a_{2n} y_n \\ \dots\dots \\ Y_n = a_{n1} y_1 + a_{n2} y_2 + \dots\dots + a_{nn} y_n \end{cases}$$

L'ensemble de ces relations constitue une substitution linéaire; on aura ainsi, en partant du même système fondamental $y_1 y_2 \dots y_n$, une substitution linéaire pour chaque point critique autour duquel on décrit un circuit fermé; soient $S_1 S_2 \dots S_p$ les substitutions correspondant aux points critiques: $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p$. On appelle groupe de l'équation proposée l'ensemble des substitutions qui correspondent à tous les points critiques.

Il est aisé de voir qu'il n'y a qu'un groupe auquel se ramènent tous les autres; car si l'on prenait au point de départ un autre système fondamental: $y'_1 y'_2 \dots y'_n$
on pourrait retrouver le premier: $y_1 y_2 \dots y_n$
par une simple substitution linéaire, de sorte que les nouvelles substitutions relatives aux divers points critiques se déduiraient des anciennes par une même substitution linéaire qui est celle par laquelle on passe d'un système fondamental à l'autre. Le groupe est donc unique, à la condition de lui ajouter une substitution linéaire arbitraire.

Comme tout chemin décrit dans le plan par un point variable se ramène à un certain nombre de circuits effectués autour des divers points critiques dans un certain ordre, on pourra déduire le système fondamental final du système fondamental initial en effectuant sur celui-ci les substitutions correspondantes dans le même ordre. — Donc connaissant les p substitutions du groupe, on pourra obtenir tous les systèmes fondamentaux et toutes les intégrales particulières de l'équation proposée.

Considérons l'intégrale : $\int_g^h (u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1}(u-x)^{\lambda-1}\,du$

chacune des limites g, h étant une des 3 quantités : a_1, a_2, ∞.

Pour que cette intégrale ait un sens, il faut que b_1 et b_2 soient positifs, au moins par leur partie réelle ; et que l'on ait :

$$3-(\lambda+b_1+b_2)>1 \qquad \text{ou :} \quad \lambda+b_1+b_2<2.$$

Cette intégrale définit 2 fonctions distinctes de x ; car la 3e est égale à la somme ou la différence des 2 autres ; par exemple :

$$\int_{a_1}^{a_2} = \int_{a_1}^{\infty} - \int_{a_2}^{\infty}$$

Posons :

$$U=(u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1}$$

$$y=\int_g^h U(u-x)^{\lambda-1}du$$

$$\frac{dy}{dx}=-(\lambda-1)\int_g^h U(u-x)^{\lambda-2}du$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=(\lambda-1)(\lambda-2)\int_g^h U(u-x)^{\lambda-3}du$$

Considérons la fonction : $\varphi(u)=(u-a_1)^{b_1}(u-a_2)^{b_2}(u-x)^{\lambda-2}$

qui s'annule pour : $u=a_1$, $u=a_2$, $u=\infty$.

Différentions-la par rapport à $\underline{u}$:

$$d\varphi=\Big[b_1(u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2}(u-x)^{\lambda-2}+b_2(u-a_1)^{b_1}(u-a_2)^{b_2-1}(u-x)^{\lambda-2}$$
$$+(\lambda-2)(u-a_1)^{b_1}(u-a_2)^{b_2}(u-x)^{\lambda-3}\Big]du$$

ou :

$$\varphi'(u)du=U\Big[b_1(u-a_2)(u-x)^{\lambda-2}+b_2(u-a_1)(u-x)^{\lambda-2}+(\lambda-2)(u-a_1)(u-a_2)(u-x)^{\lambda-3}\Big]du$$

Posons: $f(u) = (u-a_1)(u-a_2)$ $\quad g(u) = b_1(u-a_2) + b_2(u-a_1)$

$$\varphi'(u)\,du = V(u-x)^{\lambda-2} g(u)\,du + (\lambda-2)V(u-x)^{\lambda-3} f(u)\,du$$

On peut développer $g(u)$, qui est du 1er degré, et $f(u)$, qui est du 2e, suivant les puissances de $(u-x)$ par la série de Taylor:

$$g(u) = g(x) + (u-x)\,g'(x)$$

$$f(u) = f(x) + (u-x)\,f'(x) + \frac{(u-x)^2}{2} f''(x)$$

On aura donc, en ordonnant par rapport à $(u-x)$:

$$\varphi'(u)\,du = V\Big[(u-x)^{\lambda-2} g(x) + (u-x)^{\lambda-1} g'(x) + (\lambda-2)(u-x)^{\lambda-3} f(x)$$
$$+ (\lambda-2)(u-x)^{\lambda-2} f'(x) + \left(\frac{\lambda-2}{2}\right)(u-x)^{\lambda-1} f''(x)\Big]\,du$$

Intégrons, en regardant $f(x)$, $g(x)$ et leurs dérivées comme des constantes; on aura un terme en $V(u-x)^{\lambda-3}$ qui donnera $\frac{d^2y}{dx^2}$; un terme en $V(u-x)^{\lambda-2}$ qui donnera $\frac{dy}{dx}$, enfin un terme en $V(u-x)^{\lambda-1}$ qui donnera y; on aura l'équation linéaire:

$$f(x)\frac{d^2y}{dx^2} - \Big[(\lambda-2)f'(x) + g(x)\Big]\frac{dy}{dx} + (\lambda-1)\Big[\left(\frac{\lambda-2}{2}\right)f''(x) + g'(x)\Big]y = 0$$

dont le 1er coefficient est du 2e degré, le 2e du 1er degré, et le 3e est une constante. Telle est l'équation différentielle que vérifient les intégrales proposées.

Cette équation du 2e ordre, qui a été d'abord étudiée par Euler, a été mise sous une forme un peu différente par Gauss, en y faisant:

$$a_1 = 0 \quad a_2 = 1 \quad \lambda = 1-\alpha \quad b_1 = 1+\alpha-\gamma \quad b_2 = \gamma-\beta$$

Elle devient:

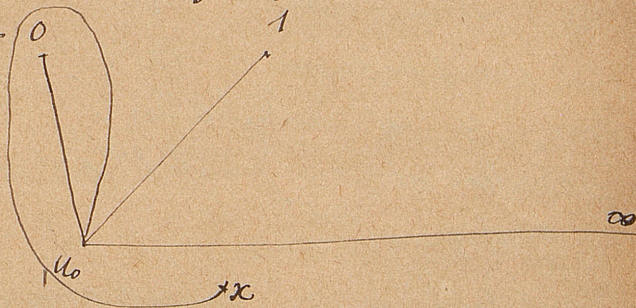
$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + \Big[\gamma - (\alpha+\beta+1)x\Big]\frac{dy}{dx} - \alpha\beta y = 0$$

L'intégrale devient, avec cette nouvelle notation :

$$y = \int_g^h u^a (u-1)^b (u-x)^\lambda \, du$$

g et h prenant une des 3 valeurs : $0, 1, \infty$.

On va montrer qu'elles peuvent aussi prendre la valeur x, c.à.d. que si x ~~peut être~~ est une des limites de l'intégrale précédente, ~~et q~~ elle vérifiera encore la même équation différentielle. Cela n'est pas évident à priori, car en différentiant y il faudrait tenir compte de la limite variable x.



Marquons dans le plan les points critiques : 0, 1, et le point à l'infini dans une certaine direction ; joignons u_0 à ces 3 points. Nous traçons ainsi 3 coupures, dont une infinie, et on astreint le point u à ne pas les traverser. Par exemple, pour aller de u_0 en x, il faudra suivre un chemin tel que celui qu'indique la figure, compris dans l'angle $0 u_0 1$.

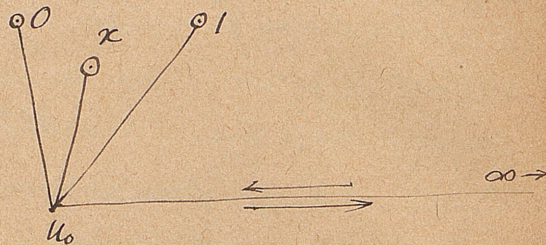
Sous ces conditions, si l'on se donne la valeur de l'élément différentiel en u_0, les 4 intégrales définies :

$$U_0 = \int_{u_0}^0 \qquad U_1 = \int_{u_0}^1 \qquad U_x = \int_{u_0}^x \qquad U_\infty = \int_{u_0}^\infty$$

seront bien déterminées. Les intégrales représentées par y le seront aussi, car ce sont des différences des précédentes :

$$\int_0^1 = U_0 - U_1 \qquad \int_0^\infty = U_0 - U_\infty \qquad \int_1^\infty = U_1 - U_\infty$$

Ainsi les différences : $V_0 - V_1$, $V_0 - V_\infty$, $V_1 - V_\infty$
sont des solutions de l'équation différentielle. On va prouver
que les différences : $V_x - V_1 = \int_x^1$ $V_x - V_\infty = \int_x^\infty$ $V_0 - V_x = \int_0^x$
sont aussi des solutions de la même équation.
Pour cela, prenons l'intégrale suivant les 4 lacets 0, 1, x et ∞ ; on forme ainsi un circuit fermé (excluant les p. critiques) : le résultat devra être nul.
Sur le lacet $(u_0, 0)$ on a, en allant : V_0, et en revenant, $-V_0 e^{2a\pi i}$
car quand on tourne de 2π autour de 0, u^a est multiplié par $e^{2a\pi i}$; le résultat est donc pour le 1er lacet :



$V_0 (1 - e^{2a\pi i})$
Sur le lacet (u_0, x), on part avec la détermination initiale multipliée par $e^{2a\pi i}$, et $(u-x)^\lambda$ se trouve multiplié par $e^{2\lambda\pi i}$ quand on tourne autour de x ; le résultat est donc pour le 2e lacet :
$e^{2a\pi i} . V_x (1 - e^{2\lambda\pi i})$
Sur le lacet $(u_0, 1)$ la détermination initiale est multipliée par $e^{2(a+\lambda)\pi i}$, et au retour elle est multipliée par $e^{2b\pi i}$; donc :
$e^{2(a+\lambda)\pi i} V_1 (1 - e^{2b\pi i})$
Enfin sur le lacet (u_0, ∞) on part avec le facteur : $e^{2(a+b+\lambda)\pi i}$, et on revient avec le facteur : $e^{-2(a+b+\lambda)\pi i}$
car pour faire le tour du point à l'infini, on décrit un cercle de centre u_0 et de rayon très grand dans le sens négatif, d'où revient

sur l'autre côté de la coupure avec ~~la même valeur changée de signe~~ le facteur : $e^{-2(a+b+\lambda)\pi i}$

Résultat : $$e^{2(a+b+\lambda)\pi i} V_\infty \left(1 - e^{-2(a+b+\lambda)\pi i}\right)$$

Puisque la somme de ces 4 intégrales est nulle, on a une relation linéaire à coefficients constants entre V_0, V_1, V_∞ et V_x, c.à.d. entre les 3 différences : $V_0 - V_1$, $V_0 - V_\infty$ et $V_0 - V_x$. Les 2 premiers étant des solutions de l'équation différentielle, la dernière en est aussi une, c.q.f.d. Ainsi la différence de 2 quelconques des 4 intégrales V_0, V_1, V_x, V_∞ satisfait l'équation différentielle, ce qui revient à dire que les limites g et h de l'intégrale y peuvent être : $0, 1, x$ ou ∞.

Cherchons maintenant le groupe de l'équation différentielle : on a la relation linéaire entre V_0 V_1 V_x V_∞ :
$$\left(1 - e^{2a\pi i}\right)V_0 + \left(e^{2a\pi i} - e^{2(a+\lambda)\pi i}\right)V_x + \left(e^{2(a+\lambda)\pi i} - e^{2(a+b+\lambda)\pi i}\right)V_1 + \left(e^{2(a+b+\lambda)\pi i} - 1\right)V_\infty = 0.$$
Prenons les 2 différences : $\omega_1 = V_x - V_0$ $\qquad \omega_2 = V_x - V_1$

qui sont des intégrales de l'équation ; elles ont des valeurs bien déterminées sous les conditions définies plus haut.

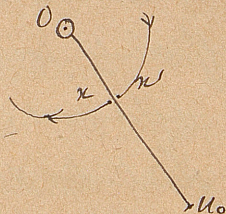
Cherchons la substitution qui correspond à une rotation de $360°$ autour du point O dans le sens négatif. Le point x, supposé sur le bord gauche du lacet (u_0, O) reviendra au même point sur le bord droit par une rotation de -2π. Les intégrales auront alors de nouvelles valeurs V'_0, V'_x, V'_1, V'_∞, et on aura les nouvelles différences : $\omega'_1 = V'_x - V'_0$ $\qquad \omega'_2 = V'_x - V'_1$

qui seront encore des intégrales de l'équation. Elles devront donc s'exprimer linéairement en fonction de ω_1, ω_2, et ces relations

linéaires représenteront la substitution d'un système fondamental à l'autre. Or on a évidemment: $V_1 = V'_1 \qquad V_\infty = V'_\infty$.

Écrivons l'identité: $V_0 = V_x + (V_0 - V_x)$

Pour calculer V'_0, allons d'abord jusqu'en $\underline{x}$ sur le lacet $(u_0, 0)$: on obtient comme auparavant V_x.



Il faut ajouter l'intégrale $\int_x^0 = V'_0 - V'_x$.

Or x ayant tourné de -2π autour de 0, le facteur $(u-x)^\lambda$ a été multiplié par $e^{-2\lambda\pi i}$; donc tous les éléments de l'intégrale sont multipliés par ce facteur, et: $V'_0 - V'_x = e^{-2\lambda\pi i}(V_0 - V_x)$

On a donc: $V'_0 = V_x + e^{-2\lambda\pi i}(V_0 - V_x)$

On a ainsi V'_0 en fonction des anciennes intégrales V_0, V_x.

On aura par suite V'_x en fonction de V_x et V_0, puisque la même relation existe entre les V' qu'entre les V, et qu'il n'y a que 2 quantités distinctes parmi les 4: V_0, V_x, V_1, V_∞.

On aura donc tous les V' en fonction des V, et par conséquent ω'_1, ω'_2 en fonction de ω_1, ω_2.

En retranchant membre à membre les 2 relations linéaires semblables, V_1 et V_∞, V'_1 et V'_∞ disparaissent, et il reste:

$$(V'_0 - V_0)(1 - e^{2\lambda\pi i}) + (V'_x - V_x)\, e^{2\lambda\pi i}(1 - e^{2\lambda\pi i}) = 0$$

Calculons: $\omega'_1 = V'_x - V'_0 = (V'_x - V_x) + (V_x - V'_0)$

D'après la relation précédente: $V'_x - V_x = \dfrac{1 - e^{-2\lambda\pi i}}{1 - e^{2\lambda\pi i}}(V'_0 - V_0)$

Or: $V'_0 - V_0 = (V'_0 - V_x) + (V_x - V_0)$

D'après une relation antérieure: $U'_0 - U_x = -\omega_1 e^{-2\lambda\pi i}$

Donc: $U'_x - U_x = -\omega_1 e^{-2\lambda\pi i}(1 - e^{-2a\pi i})$

Il vient: $\omega'_1 = -\omega_1 e^{-2\lambda\pi i}(1 - e^{-2a\pi i}) + \omega_1 e^{-2\lambda\pi i} = \omega_1 e^{-2(a+\lambda)\pi i}$

Calculons: $\omega'_2 = U'_x - U'_1 = U'_x - U_1 = (U_x - U_1) + (U'_x - U_x)$

$\omega'_2 = \omega_2 - \omega_1 e^{-2\lambda\pi i}(1 - e^{-2a\pi i}) = \omega_2 + \omega_1\left[e^{-2(a+\lambda)\pi i} - e^{-2\lambda\pi i}\right]$

On a ainsi la 1e substitution fondamentale du groupe:

$$S_1 \begin{cases} \omega'_1 = \omega_1 e^{-2(a+\lambda)\pi i} \\ \omega'_2 = \omega_2 + \omega_1\left[e^{-2(a+\lambda)\pi i} - e^{-2\lambda\pi i}\right] \end{cases}$$

qui correspond à une rotation de -2π autour du point critique 0.

— Effectuons maintenant une rotation de $+2\pi$ autour du 2e point critique 1; on aura les nouvelles valeurs des intégrales $U''_0, U''_x, U''_1, U''_\infty$ qu'on exprimera au moyen des anciennes valeurs: $U_0\ U_x\ U_1\ U_\infty$.

On a d'abord, identiquement: $U''_0 = U_0$ $\qquad U''_\infty = U_\infty$.

Posons: $U_1 = U_x + (U_1 - U_x)$

on trouve, par le même raisonnement que ci-dessus:

$$U''_1 = U_x + e^{2\lambda\pi i}(U_1 - U_x)$$

D'autre part, on a la relation:

$$(U''_x - U_x)(e^{2a\pi i} - e^{2(a+\lambda)\pi i}) + (U''_1 - U_1)(e^{2(a+\lambda)\pi i} - e^{2(a+b+\lambda)\pi i}) = 0$$

ou: $(U''_x - U_x)(1 - e^{2\lambda\pi i}) + (U''_1 - U_1)e^{2\lambda\pi i}(1 - e^{2b\pi i}) = 0$

En calculant au moyen de ces relations : $\omega_1'' = U_x'' - U_0''$
on trouve la 2e substitution : $\omega_2'' = U_x'' - U_1''$

$$S_2 \left\{ \begin{array}{l} \omega_1'' = \omega_1 + \omega_2 \left[e^{2(b+\lambda)\pi i} - e^{2\lambda\pi i} \right] \\ \omega_2'' = \omega_2 \, e^{2(b+\lambda)\pi i} \end{array} \right.$$

Telles sont les 2 substitutions fondamentales S_1 S_2 du groupe qui, une fois connues, donnent toutes les déterminations possibles des intégrales de l'équation hypergéométrique.

Cas particulier, s'appliquant aux intégrales elliptiques.

Faisons : $a = b = \lambda = -\frac{1}{2}$: l'intégrale prend la forme :

$$\int_g^h \frac{du}{\sqrt{u(u-1)(u-x)}} \qquad \left.\begin{array}{l} g \\ h \end{array}\right\} = 0, 1, x, \infty .$$

C'est une intégrale elliptique qui est fonction de la variable x, racine du polynôme du 3e degré soumis au radical ; elle admet pour demi-périodes les différences : $U_x - U_0$, $U_x - U_1$.

Les 2 substitutions deviennent dans ce cas :

$$S_1 \left\{ \begin{array}{l} \omega_1' = \omega_1 \\ \omega_2' = \omega_2 + 2\omega_1 \end{array} \right. \qquad S_2 \left\{ \begin{array}{l} \omega_1'' = \omega_1 + 2\omega_2 \\ \omega_2'' = \omega_2 \end{array} \right.$$

Le rapport des périodes : $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ est une certaine fonction de x ; on sait que c'est un nombre imaginaire ; donc sa partie imaginaire ne s'annule jamais (sauf peut être aux points critiques 0, 1.) Il en résulte que si l'on franchit les coupures un nombre quelconque de fois (sans passer par les points critiques.) c.à.d. si l'on fait tourner les

substitutions possibles du groupe, la partie imaginaire de ce rapport conserve toujours le même signe. En effet, appelons z ce rapport, z', z'' le résultat des substitutions S_1, S_2 sur $\frac{\omega_2}{\omega_1}$:

$$z = \frac{\omega_2}{\omega_1} \qquad z' = z + 2 \qquad z'' = \frac{z}{2z+1}$$

Ces 2 substitutions rentrent dans le type suivant :

$$z' = \frac{az+b}{cz+d} \qquad \text{où :} \qquad ad - bc = +1.$$

En effet, posons explicitement : $z = x + yi$:

$$z' = \frac{ax+b+ayi}{cx+d+cyi} = \frac{(ax+b+ayi)(cx+d-cyi)}{(cx+d)^2+(cy)^2}$$

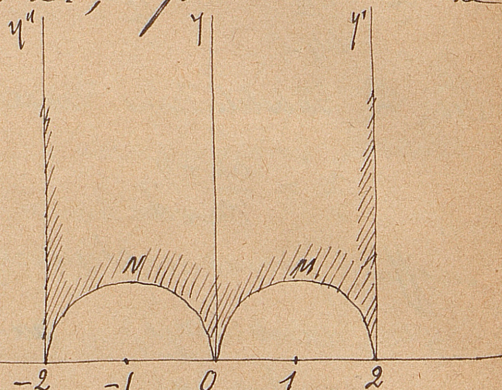
Il n'y a à considérer que le signe de la partie imaginaire du numérateur ; elle est : $ay(cx+d) - cy(ax+b) = +y$ en vertu de l'hypothèse particulière où nous sommes placés ; donc la partie imaginaire de z' a le même signe que y.

D'ailleurs ω_1 ne s'annule jamais, car alors il n'y aurait plus qu'une période ; donc z n'a pour points singuliers que : 0, 1, et ∞.

En faisant l'inversion de la fonction z de x, c.à.d. en posant $\frac{\omega_2(x)}{\omega_1(x)} = z$ et en tirant x en fonction de z, on trouve que x est une fonction uniforme de z.

Pour le prouver, on assujettira x à rester dans la partie du plan supérieure à l'axe réel, et on ~~cherch~~ verra quelle partie du plan des z correspond au demi-plan des x. En choisissant une détermination

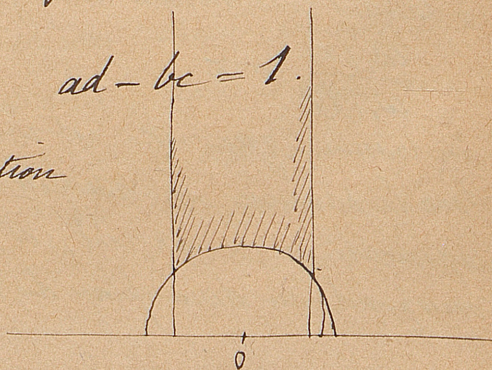
du radical : $\sqrt{u(u-1)(u-x)}$ en un point initial, la fonction z sera bien déterminée dans tout le demi-plan supérieur, puisqu'on ne pourra tourner autour des points critiques 0 et 1. Quand le point x décrit l'axe réel, de 0 à 1, le point z décrit l'axe purement imaginaire ; de 1 à ∞, z décrit une demi-circonférence ayant pour centre le point $+1$; enfin, de $-\infty$ à 0, z décrit une parallèle à l'axe imaginaire. Ainsi le contour $yOM2y'$ correspond dans le plan des z à l'axe réel des x, et le quadrilatère curviligne qu'il



enferme au demi-plan supérieur. On trouverait de même qu'au demi-plan inférieur correspond le quadrilatère $yON\text{-}2y''$ symétrique du précédent par rapport à l'axe imaginaire ; de sorte que l'ensemble de la surface comprise entre les 2 parallèles : $2y'$, $-2y''$, et les 2 circonférences M et N correspond au plan entier des x (à l'exception des p. critiques). Cette figure se répète indéfiniment de part et d'autre, parallèlement d'elle-même ; c'est ce qu'on appelle le polygone fondamental de la substitution considérée :

$$z' = \frac{az+b}{cz+d} \qquad \text{où ;} \qquad ad - bc = 1.$$

(Le polygone fondamental de la substitution générale, où : $ad - bc \gtrless 1$, est de la forme suivante :



Calcul des variations.

Le problème auquel s'applique la méthode des variations et pour lequel elle a été inventée est le suivant :

Étant donné une intégrale de la forme :

$$S = \int_{x_0}^{x_1} V(x, y, y')\, dx \qquad (x_0, x_1 \text{ limites fixes})$$

trouver une fonction y de x qui rende cette intégrale maxima ou minima, c.à.d. plus grande ou plus petite que les intégrales infiniment voisines qu'on obtiendrait en substituant à y des fonctions infiniment peu différentes.

Ce problème a été étudié par Euler puis par Lagrange, qui l'ont ramené à une question de calcul intégral moyennant certaines restrictions.

Supposons qu'on assujettisse la fonction y à prendre aux limites x_0, x_1 des valeurs fixes données y_0, y_1. Toute fonction de x soumise à ces conditions sera représentée par une courbe passant par les 2 points fixes $(x_0\, y_0)$ $(x_1\, y_1)$

Soit : $y = f(x)$ celle de ces fonctions qui rend l'intégrale maxima ou minima ; supposons que toutes les autres puissent se mettre sous la forme : $y = F(x, \alpha)$ de telle sorte que pour une certaine valeur de α, soit α_0, y se réduise à $f(x)$: $F(x, \alpha_0) = f(x)$

et que, pour $x = x_0$, $x = x_1$, y prenne les valeurs y_0, y_1,

quel que soit α : $F(x_0, \alpha) = y_0$ $F(x_1, \alpha) = y_1$
Telle serait, par exemple, la fonction suivante :

$$y = f(x) + (\alpha - \alpha_0)(x - x_0)(x - x_1)\,\psi(x, \alpha)$$

$f(x)$ prenant les valeurs y_0, y_1 pour $x = x_0$, $x = x_1$, et ψ étant une fonction quelconque de x et du paramètre α. Supposons enfin que les dérivées premières de F soient continues dans l'intervalle (x_0, x_1). Si l'on substitue F à y dans S, cette intégrale deviendra une fonction de α, et elle sera maxima ou minima pour : $\alpha = \alpha_0$. On est ainsi ramené au problème connu du maximum et du minimum d'une fonction d'une variable ; on sait que la condition nécessaire est que sa dérivée ou sa différentielle par rapport à la variable soit nulle et cette condition détermine la ou les valeurs de la variable qui correspondent aux maxima et minima de la fonction.

– On appellera variation la différentielle de l'intégrale par rapport au paramètre α, et on la désignera par la lettre δ, en réservant le d pour les différentielles relatives à x. Les 2 variables x, α étant absolument indépendantes, les différentielles par rapport à chacune d'elles sont distinctes ; leur ordre est donc indifférent, et l'on a : $d\delta f = \delta d f$.

Tout revient donc à annuler la variation de S. Calculons-la en différentiant sous le signe somme :

$$\delta S = \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial V}{\partial y}\delta y + \frac{\partial V}{\partial y'}\delta y' \right) dx = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial V}{\partial y}\delta y\, dx + \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial V}{\partial y'}\delta y'\, dx$$

Transformons la 2e intégrale en l'intégrant par parties; remarquons en effet que: $\delta y' . dx = \delta(y'dx) = \delta . dy = d . \delta y$

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial V}{\partial y'} . d\delta y = \left[\frac{\partial V}{\partial y'} \delta y\right]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial V}{\partial y'}\right) \delta y . dx$$

Or la partie intégrée est nulle, car δy est nulle aux 2 limites, toute fonction y prenant les valeurs y_0 y_1 quel que soit α

On a donc en réunissant les 2 intégrales:

$$\delta S = \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial V}{\partial y'}\right)\right] \delta y \, dx$$

Pour $\alpha = \alpha_0$, c.à.d. pour un maximum ou minimum de S, la quantité entre crochets, qui est une fonction de x, doit être identiquement nulle, c.à.d. qu'on doit avoir, en substituant dans V: $y = f(x)$, la relation: $\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial V}{\partial y'}\right) = 0$.

En effet, si cela n'avait pas lieu, on pourrait s'arranger pour donner à δy toujours le même signe qu'aurait la quantité entre crochets, de façon que δS, somme d'éléments essentiellement positifs, ne pourrait être nulle. Par exemple, en supposant y de la forme:

$$y = f(x) + (\alpha - \alpha_0)(x_1 - x)(x_0 - x)\,\varphi(x)$$

on aurait:

$$\delta y = \delta\alpha\,(x_1 - x)(x_0 - x)\,\varphi(x)$$

et il suffirait de choisir convenablement $\varphi(x)$ pour disposer du signe de δy dans le sens que nous venons d'indiquer.

Ainsi, pour que δS s'annule, il faut donc que l'on ait, ~~pour~~ identiquement :
$$\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial V}{\partial y'}\right) = 0 \qquad (V)$$
pour $x = x_0$, ou : $y = f(x)$. Cela revient à dire que la fonction y qui rend l'intégrale S maxima ou minima est une solution de l'équation différentielle du 2e ordre (V).
L'intégrale générale de cette équation contient 2 constantes arbitraires ; mais elles seront déterminées par les conditions aux limites : $f(x_0) = y_0$ $\quad f(x_1) = y_1$
La fonction y sera donc bien déterminée ; il n'y aura qu'un (en général) nombre fini de solutions bien distinctes, c.à.d. géométriquement, de courbes qui ne seront pas infiniment voisines.

— Cas particulier. Supposons que x ne figure pas dans V, on aura dans ce cas une équation du 2e ordre entre y, y', y'' qui se ramène à des quadratures.
En effet, on a alors : $dV = \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial y'} dy'$
d'où : $\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{dV - \frac{\partial V}{\partial y'} dy'}{dy}$
L'équation (V) devient : $dV - \frac{\partial V}{\partial y'} dy' - \frac{dy}{dx} d\left(\frac{\partial V}{\partial y'}\right) = 0$
dy et dx étant des différentielles véritables, on peut les remplacer par leur quotient : $dV - \frac{\partial V}{\partial y'} dy' - y' d\frac{\partial V}{\partial y'} = 0$
On intègre immédiatement : $V - y'\frac{\partial V}{\partial y'} = C$
d'où l'on tirera : $y' = \varphi(y, C)$

et l'on aura y par une 2e quadrature, avec une nouvelle constante.

— Exemple: Trouver la plus courte ligne entre 2 points donnés.
Il s'agit de trouver le minimum de l'intégrale:

$$\int_{x_0}^{x_1} ds = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2}\, dx \qquad V = \sqrt{1+y'^2}$$

L'équation différentielle se réduit à: $\frac{d}{dx} \cdot \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = 0$

d'où, en intégrant: $y' = C$

Intégrons de nouveau: $y = Cx + C'$

Telle est l'équation la plus générale des lignes demandées; les constantes C et C' sont déterminées par les conditions aux limites, c.à.d. par les coordonnées des 2 points. On trouve la droite qui joint ces 2 points. Ce résultat est une vérification, et non une démonstration, car les propriétés de la ligne droite sont impliquées dans la définition de l'élément linéaire ds^2.

— Considérons l'équation différentielle du 2e ordre:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$$

Son intégrale contiendra 2 constantes arbitraires. On peut déterminer cette intégrale en l'assujettissant à prendre la valeur A pour $x = a$, et la valeur B pour $x = b$; c.à.d. en astreignant la courbe intégrale à passer par les 2 points (a, A) et (b, B).
Supposons pour simplifier, que ce second point soit l'origine; nous voulons obtenir une intégrale de cette équation qui passe par les 2 points $(0, 0)$ et (a, A).

(cf. 2e cahier, page 95)

Pour cela, nous procéderons par approximations successives. Prenons pour première approximation la droite qui joint les 2 points, dont l'ordonnée est : $y_0 = \frac{A}{a} x$ et substituons-la dans l'équation :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, y_0, \frac{dy_0}{dx}\right) = \varphi_0(x)$$

Cette équation s'intègre par 2 quadratures superposées qui se réduisent à une seule. On déterminera l'intégrale y_1 par les conditions ~~initiales~~ aux limites : $y = 0$ pour $x = 0$, $y = A$ pour $x = a$

On substituera alors cette fonction y_1 dans l'équation :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, y_1, \frac{dy_1}{dx}\right) = \varphi_1(x)$$

qu'on résoudra de même, et d'où l'on tirera une intégrale y_2 soumise aux mêmes conditions aux limites, et ainsi de suite. On obtiendra ainsi une suite de fonctions : $y_1\, y_2 \ldots\ldots y_n \ldots$ prenant toutes pour $x = 0$ la valeur 0, et pour $x = a$ la valeur A. On va prouver que, si la distance des 2 points $(0, 0)$ et (a, A) est suffisamment petite, cette suite a une limite qui est une fonction bien déterminée de x, et qui prend aussi aux limites les valeurs 0 et A.

Or la fonction :

$$y = \int_0^x \varphi(z)(x - z)\, dz$$

considérée comme fonction de x est une intégrale de l'équation considérée ; en effet :

$$\frac{dy}{dx} = \int_0^x \varphi(z)\, dz$$

(le terme relatif à la limite x est nul.)

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \varphi(x)$$

Comme la fonction y n'est déterminée que par sa dérivée seconde, on peut lui ajouter 2 constantes, c.à.d. un binôme du 1er degré ; ces 2 constantes sont déterminées par les conditions aux limites. Pour que $y=0$ pour $x=0$, il faut que la constante additive soit nulle ; donc y est de la forme :

$$y = \int_0^x \varphi(z)(x-z)\,dz + hx$$

Pour que $y = A$ pour $x = a$, il faut que h vérifie l'équation :

$$A = \int_0^a \varphi(z)(a-z)\,dz + ha \qquad h = \frac{A}{a} - \frac{1}{a}\int_0^a \varphi(z)(a-z)\,dz$$

On a donc l'intégrale bien déterminée :

$$y = \int_0^x \varphi(z)(x-z)\,dz + \frac{A}{a}x - \frac{x}{a}\int_0^a \varphi(z)(a-z)\,dz$$

d'où : $\displaystyle \frac{dy}{dx} = \int_0^x \varphi(z)\,dz + \frac{A}{a}$. $\qquad \displaystyle \frac{d^2y}{dx^2} = \varphi(x)$

Soit M le module maximum de $\varphi(z)$ dans l'intervalle $(0, a)$. Calculons le maximum de la valeur absolue de y. On a évidemment

$$|x-z| \leq a, \quad \frac{x}{a} \leq 1, \quad \left|\int_0^x dz\right| \leq a, \text{ puisque } 0 \leq x \leq a$$

Donc : $\qquad |y| < Ma^2 + A + Ma^2 = 2Ma^2 + A$

$$\left|\frac{dy}{dx}\right| < Ma + \frac{A}{a}.$$

Nous supposons que : $f(x, y, y')$ est une fonction bien définie quand $|y| \leq L$, et reste dans ces limites inférieure à M
et $|y'| \leq L$

en valeur absolue. Nous supposons de plus que pour 2 systèmes de valeurs (y_1, y_1'), (y_0, y_0') pris dans ces limites, on a :

$$|f(x, y_1, y_1') - f(x, y_0, y_0')| < \alpha|y_1 - y_0| + \beta|y_1' - y_0'|$$

pour toute valeur de x comprise dans l'intervalle $(0, a)$, α, β étant 2 quantités finies et fixes.

Pour que l'on puisse obtenir la suite indéfinie : $y_1\, y_2 \dots y_n \dots$ il faut que les fonctions successives $y_1\, y_2 \dots y_n$ restent inférieures en valeur absolue à L, x restant compris dans l'intervalle $(0, a)$.

On va prouver que si la distance des 2 points $(0,0)$ et (a, A) est suffisamment petite, on aura toujours : $|y_n| < L$.

En effet sous la condition : $\varphi_0(x) < M$, on a :

$$|y_1| < 2Ma^2 + A \qquad \left|\frac{dy_1}{dx}\right| < Ma + \frac{A}{a}$$

Donc si a et A sont assez petits, on aura à la fois :

$$|y_1| < L \qquad |y_1'| < L$$

ce qui revient à dire que la distance des 2 points est assez petite. Mais alors on aura : $|\varphi_1(x)| < M$, et par suite les mêmes inégalités que ci-dessus pour y_2 et y_2' ; et ainsi de suite, de sorte que si la condition : $|y_0| < L$, $|y_0'| < L$ est vérifiée, elle sera vérifiée pour toutes les fonctions $y_1\, y_2 \dots y_n$ et pour leurs dérivées, indéfiniment : toutes les fonctions $y_1\, y_2 \dots y_n$ resteront comprises dans l'intervalle $(-L, +L)$. Reste à prouver qu'elles ont une limite.

Supposons : $A = 0$. On aura les 2 maxima suivants :

$$|y| < 2Ma^2 \qquad |y'| < Ma$$

qui se réduisent à un seul en supposant : $a \leqq \frac{1}{2}$:

$$|y| < Ma \qquad |y'| < Ma$$

Soit K le module maximum des différences : $\left\{ \begin{matrix} (y_1 - y_0) \\ (y'_1 - y'_0) \end{matrix} \right.$ dans l'intervalle $(0, a)$. — On a identiquement :

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = f(x, y_0, y'_0) \qquad \frac{d^2 y_2}{dx^2} = f(x, y_1, y'_1)$$

d'où, en retranchant : $\frac{d^2(y_2 - y_1)}{dx^2} = f(x, y_1, y'_1) - f(x, y_0, y'_0)$

$$\frac{d^2(y_2 - y_1)}{dx^2} < \alpha|y_1 - y_0| + \beta|y'_1 - y'_0| < (\alpha + \beta)K$$

Par suite : $|y_2 - y_1| < K(\alpha+\beta)a$, $|y'_2 - y'_1| < K(\alpha+\beta)a$.

En appliquant la même série d'inégalités à la relation :

$$\frac{d^2(y_3 - y_2)}{dx^2} = f(x, y_2, y'_2) - f(x, y_1, y'_1)$$

on trouve : $\frac{d^2(y_3 - y_2)}{dx^2} < K(\alpha+\beta)^2 a$

d'où : $|y_3 - y_2| < K(\alpha+\beta)^2 a^2$ $\qquad |y'_3 - y'_2| < K(\alpha+\beta)^2 a^2$

et ainsi de suite ; on trouvera généralement :

$$|y_{n+1} - y_n| < K(\alpha+\beta)^n a^n \qquad |y'_{n+1} - y'_n| < K(\alpha+\beta)^n a^n$$

Or, si l'on prend a suffisamment petit, on aura :

$(\alpha+\beta)\,a < 1$, et dès lors :

$(y_{n+1} - y_n)$ et $(y'_{n+1} - y'_n)$ tendront vers zéro comme le terme général d'une progression géométrique décroissante. Donc les 2 suites: $y_1 y_2 \dots y_n \dots$, $y'_1 y'_2 \dots y'_n \dots$ sont convergentes, et ont pour limites 2 fonctions y, y', dont la 2e est la dérivée de la 1e.

Reste à prouver que la fonction y satisfait l'équation différentielle proposée. Or on obtient le terme y_n en intégrant l'équation:

$$\frac{d^2 y_n}{dx^2} = f(x, y_{n-1}, y'_{n-1})$$

$$y_n = \int_0^x f(z, y_{n-1}, y'_{n-1})(x-z)\,dz + \frac{A}{a}x - \frac{x}{a}\int_0^a f(z, y_{n-1}, y'_{n-1})(a-z)\,dz$$

Si l'on fait tendre n vers ∞, l'indice disparait, et on trouve:

$$y = \int_0^x f(z, y, y')(x-z)\,dz + \frac{A}{a}x - \frac{x}{a}\int_0^a f(z, y, y')(a-z)\,dz$$

d'où l'on tire, en différentiant 2 fois:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f(x, y, y')$$

ce qui prouve que y vérifie l'équation proposée.

Ainsi, étant donnés dans le plan 2 points suffisamment voisins, on peut affirmer qu'il passe par ces 2 points une courbe intégrale. Il peut d'ailleurs en passer plusieurs, et c'est ce qui arrive en général.

— Dans le cas particulier de l'équation linéaire du 2e ordre (homogène):

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 2A\frac{dy}{dx} + By$$

où A, B sont des fonctions de x continues entre x_0 et x_1,

on peut prouver qu'il n'y a qu'une seule intégrale qui prenne les valeurs y_0, y_1 pour $x = x_0$, $x = x_1$, c.à.d. une seule courbe intégrale passant par les points $(x_0 y_0)$, $(x_1 y_1)$.
Soit en effet une autre intégrale passant par les mêmes points : l'équation étant linéaire, la différence des 2 intégrales serait encore une intégrale, et elle s'annulerait pour $x = x_0$, $x = x_1$.
La question est de savoir si l'équation linéaire admet une solution qui s'annule aux 2 limites x_0, x_1, sans être constamment nulle dans cet intervalle. Soit y une telle solution, l'intégrale :

$$\int_{x_0}^{x_1} y\left[\frac{d^2y}{dx^2} - 2A\frac{dy}{dx} - By\right]dx$$

sera identiquement nulle (le crochet étant constamment nul).
Intégrons par parties le 1er terme :

$$\int_{x_0}^{x_1} y\frac{d^2y}{dx^2}\,dx = \left[y\frac{dy}{dx}\right]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx$$

La partie intégrée est nulle, puisque par hypothèse $y = 0$ aux 2 limites. On a donc encore identiquement :

$$\int_{x_0}^{x_1}\left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2Ay\frac{dy}{dx} + By^2\right]dx = 0$$

L'élément différentiel est une forme quadratique en y et $\frac{dy}{dx}$.
Si cette forme est définie entre x_0 et x_1, c.à.d. garde un signe constant $(A^2 \leq B)$ l'élément différentiel devra être identiquement nul (pour que l'intégrale s'annule), c.à.d. qu'il faut que y soit constamment nulle, et par suite aussi $\frac{dy}{dx}$. Donc



dans le cas où : $A^2 \leq B$, l'équation linéaire homogène du 2e ordre n'admet qu'une intégrale passant par 2 points donnés.

— On a dû remarquer l'analogie qui existe entre les théorèmes précédents et le problème fondamental du calcul des variations. Ils vont en effet trouver leur application dans l'étude de la variation seconde, de laquelle dépend la connaissance complète des maxima et minima d'une intégrale. Nous considérons toujours la fonction :

$$S = \int_{x_0}^{x_1} V(x, y, y')\, dx$$

dont la variation première est :

$$\delta S = \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial V}{\partial y} \delta y + \frac{\partial V}{\partial y'} \delta y' \right) dx = \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left[\frac{\partial V}{\partial y'}\right] \right) \delta y . dx$$

Calculons la variation seconde (différentielle seconde par rapport à α) :

$$\delta^2 S = \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \delta y^2 + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'} \delta y \delta y' + \frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} \delta y'^2 \right] dx$$

Il y aurait encore un terme : $\left[\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial V}{\partial y'}\right) \right] \delta^2 y$

provenant de la différentiation de δy, mais il disparaît, puisqu'on suppose que δS est nulle, c.à.d que la fonction y vérifie l'équation :

$$\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial V}{\partial y'}\right) = 0 \qquad (1)$$

Nous allons transformer l'expression de $\delta^2 S$ comme nous avons fait celle de δS :

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} \delta y'^2 . dx = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} \delta y' . d\delta y = \left[\frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} \delta y \delta y' \right]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} \delta y' \right) \delta y . dx$$

La partie intégrée est nulle, donc : $\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} \delta y'^2 dx = -\int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} \delta y'\right) \delta y . dx$

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'} \delta y \delta y' . dx = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'} \delta y . d\delta y = \left[\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'} \delta y^2\right]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \delta y \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'} \delta y\right) dx$$

La partie intégrée est nulle, il reste donc :

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'} \delta y \delta y' . dx = -\int_{x_0}^{x_1} \delta y \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'} \delta y' dx - \int_{x_0}^{x_1} \delta y^2 \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'}\right) dx$$

d'où ; $$2\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'} \delta y \delta y' . dx = -\int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'}\right) \delta y^2 . dx$$

On a en somme :

$$\delta^2 S = \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \delta y^2 - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'}\right) \delta y^2 - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} . \delta y'\right) \delta y\right] dx$$

$$\delta^2 S = \int_{x_0}^{x_1} \left[P \delta y - \frac{d}{dx}(Q \delta y')\right] \delta y . dx$$

en posant :

$$P = \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'}\right) \qquad Q = \frac{\partial^2 V}{\partial y'^2}$$

P et Q sont des fonctions de <u>x</u> — Posons : $\delta y = z$

~~et~~ égalons à 0 le crochet qui figure dans l'intégrale :

$$Pz - \frac{d}{dx}\left(Q \frac{dz}{dx}\right) = 0 \qquad (2)$$

Le maximum et le minimum de S dépend de cette équation linéaire homogène du 2e ordre. Or cette équation est liée à

l'équation (1) qui exprime la condition pour que δS s'annule; car si l'on intègre l'équation (1), et nous supposons qu'on l'a intégrée, on trouve la solution: $y = f(x, C_1, C_2)$ qui annule la variation première. On peut en conclure l'intégrale générale de l'équation (2) – Nous allons prouver, en effet, que celle-ci admet comme intégrales: $\frac{\partial f}{\partial C_1}$, $\frac{\partial f}{\partial C_2}$.

Substituons dans l'équation (1): $y = f(x, C_1, C_2)$

elle devient une identité. Différentions-la par rapport à C_1 on a identiquement: $y' = \frac{\partial f}{\partial x}$.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\frac{\partial f}{\partial C_1} + \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial C_1} - \frac{d}{dx}\left[\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'}\frac{\partial f}{\partial C_1} + \frac{\partial^2 V}{\partial y'^2}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial C_1}\right] = 0$$

En effectuant les différentiations indiquées, 2 termes se détruisent, il reste:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\frac{\partial f}{\partial C_1} - \frac{\partial f}{\partial C_1}\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'}\right) - \frac{d}{dx}\left[\frac{\partial^2 V}{\partial y'^2}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial C_1}\right] = 0$$

ce qui prouve que $\frac{\partial f}{\partial C_1}$ vérifie l'équation (2): $Pz - \frac{d}{dx}\left(Q\frac{dz}{dx}\right) = 0$

On obtiendrait la même identité pour $\frac{\partial f}{\partial C_2}$.

Donc $\frac{\partial f}{\partial C_1}$, $\frac{\partial f}{\partial C_2}$ forment un système fondamental de l'équation (2), et par conséquent, quand on connaît l'intégrale générale de l'équation (1) on connaît celle de l'équation (2). C'est de la nature de ces intégrales que dépend l'existence du ~~maxim~~ maximum ou du minimum de S.

— Soit z une intégrale quelconque de l'équation (2.) Posons:

$$\delta y = tz$$

t étant une nouvelle variable infiniment petite comme δy.
L'élément différentiel de $\delta^2 S$: $\delta y\left[P\delta y - \frac{d}{dx}(Q\,\delta y')\right]$

devient : $tz\left[P\,tz - \frac{d}{dx}\left(Q\,\frac{d(tz)}{dx}\right)\right]$ Le crochet devient :

$$Ptz - \frac{d}{dx}\left(Qt\,\frac{dz}{dx} + Qz\,\frac{dt}{dx}\right) = -Q\,\frac{dz}{dx}\,\frac{dt}{dx} - \frac{d}{dx}\left(Qz\,\frac{dt}{dx}\right)$$

$$= -2Q\,\frac{dz}{dx}\,\frac{dt}{dx} - z\,\frac{d}{dx}\left(Q\,\frac{dt}{dx}\right)$$ Multiplions par tz :

$$t\left[-2z\frac{dz}{dx}\cdot Q\,\frac{dt}{dx} - z^2\frac{d}{dx}\left(Q\,\frac{dt}{dx}\right)\right] = -t\,\frac{d}{dx}\left(Qz^2\,\frac{dt}{dx}\right)$$ Donc :

$$\delta^2 S = -\int_{x_0}^{x_1} t\,\frac{d}{dx}\left(Qz^2\frac{dt}{dx}\right)dx$$

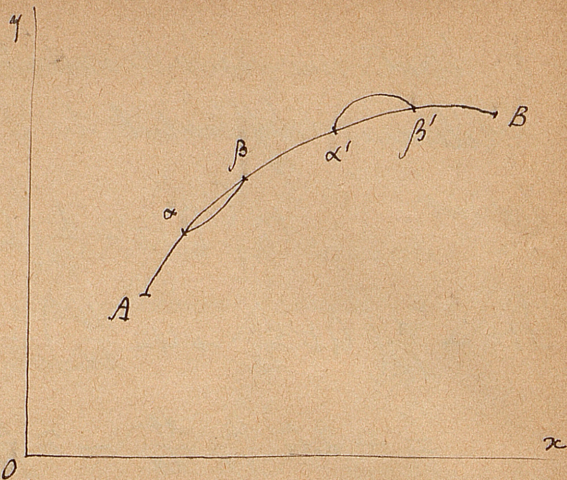
Intégrons par parties : la partie intégrée est nulle, car t s'annule comme δy aux limites x_0, x_1 ; il reste donc :

$$\delta^2 S = \int_{x_0}^{x_1} Qz^2\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 dx \qquad\qquad Q = \frac{\partial^2 V}{\partial y'^2}$$

On voit que le signe de la variation seconde dépend de Q seul. Si Q change de signe dans l'intervalle (x_0, x_1) il n'y aura ni maximum ni minimum, car $\delta^2 S$ pourra aussi changer de signe. — Supposons que dans l'intervalle (α, β) $\frac{\partial^2 V}{\partial y'^2}$ soit constamment positif : on prendra une intégrale $\underline{z}$ ne s'annulant pas dans cet intervalle, et on choisira $\underline{t}$ fonction de $\underline{x}$ non nulle dans l'intervalle (α, β) mais nulle de x_0 en α et de β en x_1 ; de sorte que $\underline{\delta y}$ soit nulle de A à α, de β à B, et varie

entre α et β. La valeur de $\delta^2 S$ se réduira à l'intégrale :

$$\int_\alpha^\beta Q z^2 \left(\frac{dt}{dx}\right)^2 dx > 0$$



Si au contraire Q est négatif sur un autre arc $\alpha'\beta'$, on prendra toujours une intégrale z ne s'annulant pas dans cet intervalle, on choisira t nul de A à α' et de β' à B et variable entre α' et β' ; on aura :

$$\delta^2 S = \int_{\alpha'}^{\beta'} Q z^2 \left(\frac{dt}{dx}\right)^2 dx < 0$$

Ainsi, en choisissant convenablement des courbes infiniment voisines de la courbe qui annule la variation première, on pourra donner à la variation seconde le signe qu'on voudra. Il n'y a dans ce cas ni maximum ni minimum pour cette courbe.

Donc, pour que la courbe qui correspond à : $\delta S = 0$, donne lieu à un maximum ou minimum de S, il faut que $\frac{\partial^2 V}{\partial y'^2}$ ait un signe invariable le long de cette courbe.

Cette condition n'est pas suffisante, et il faut distinguer ici 2 cas.

Supposons que l'équation (2) admette une intégrale z ne s'annulant pas dans l'intervalle (x_0, x_1). Faisons le changement de variable :

$$\delta y = tz.$$

Q a par hypothèse un signe invariable par exemple le signe $+$. Pour que $\delta^2 S$ s'annule, il faudrait que $z^2 \left(\frac{dt}{dx}\right)^2$ fût

constamment nul : or $z^2 > 0$, il faudrait donc que $\frac{dt}{dx}$ fût constamment nulle, c. à d. que t fût constant ; mais comme t est nul aux 2 limites, il faudrait que t fût constamment nul, c. à d. qu'il n'y eût pas de variation δy. Donc, pour toute courbe voisine de la courbe qui annule δS, $\delta^2 S$ sera différente de 0, et aura le même signe que Q. Si le signe invariable de Q est −, il y aura un maximum ; s'il est +, il y aura un minimum de S pour cette courbe.

— Supposons maintenant que l'équation (2) n'admette aucune intégrale qui garde un signe invariable entre x_0 et x_1. On va montrer qu'on pourra toujours annuler $\delta^2 S$, Q ayant par hypothèse un signe invariable.

Soient z_1, z_2 2 intégrales distinctes de l'équation (2), formant un système fondamental. Nous savons évaluer le déterminant :

$$\begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ z_1' & z_2' \end{vmatrix}$$

Il a pour expression (cf. page 59).

$$z_1 \frac{dz_2}{dx} - z_2 \frac{dz_1}{dx} = Ce^{-\int p dx}$$

p étant le coefficient du 2e terme de l'équation linéaire dont le 1er coefficient est 1 ;

$$p = \frac{1}{Q} \cdot \frac{dQ}{dx}$$

$$\int p dx = \log Q$$

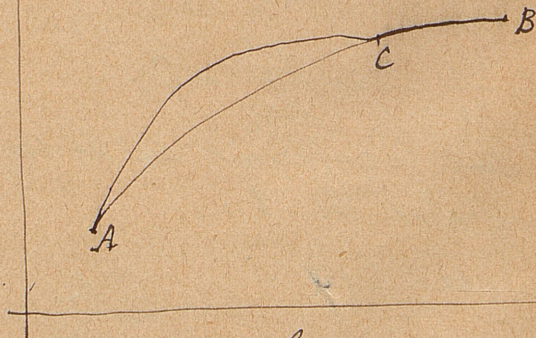
$$z_1 \frac{dz_2}{dx} - z_2 \frac{dz_1}{dx} = Ce^{-\log Q} = \frac{C}{Q}$$

Divisons les 2 membres par z_1^2 :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{z_2}{z_1}\right) = \frac{C}{Q z_1^2}$$

Le 2e membre a, par hypothèse, un signe invariable, donc $\frac{z_2}{z_1}$

varie toujours dans le même sens. Supposons que $\frac{z_2}{z_1}$ aille en croissant constamment. Soit m la valeur de ce rapport pour $x = x_0$; il augmentera jusqu'à $+\infty$, puis de $-\infty$ à une certaine valeur n qu'il atteindra pour $x = x_1$. Je dis que $n > m$. En effet, si l'on avait : $n < m$, le rapport $\frac{z_2}{z_1}$ ne prendrait jamais une certaine valeur μ : $n < \mu < m$, de sorte que l'intégrale : $z_2 - \mu z_1$ ne s'annulerait jamais dans l'intervalle (x_0, x_1) ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc : $n \geq m$, c.à.d. que le rapport $\frac{z_2}{z_1}$ parcourt entre x_0 et x_1 toute l'échelle des valeurs possibles de $-\infty$ à $+\infty$. — Or si l'on considère en particulier l'intégrale : $z_2 - m z_1$ on voit qu'elle s'annule pour $x = x_0$, et pour $x = \alpha \leq x_1$. On aura ainsi une intégrale z s'annulant au point A et au point C qui se trouve sur l'arc AB.



On peut dès lors s'arranger pour que : $\delta^2 S = 0$

On prendra : $\delta y = tz$ de A en C, t étant ici une constante (infiniment petite) et

$\delta y = 0$ de C en B.

On aura bien : $\delta y = 0$ en A, B et C. La valeur de $\delta^2 S$ sera nulle, puisque $\frac{dt}{dx} = 0$ de A en C, et ~~t = 0~~ de C en B.

Ainsi on peut imaginer une loi de variation continue pour y et δy, telle que l'on ait : $\delta^2 S = 0$

Dans ce cas, on peut dire qu'il n'y aura en général ni maximum ni minimum. Pour pouvoir l'affirmer dans chaque cas particulier, on devra étudier la variation troisième, il faudra qu'elle ne s'annule pas dans l'intervalle (x_0, x_1). Si elle s'annulait, on serait obligé de recourir à la variation quatrième, et ainsi de suite. Il y aura maximum ou minimum quand la variation qui ne s'annule pas est d'ordre pair, et selon qu'elle a le signe $-$ ou le signe $+$.

En se restreignant à l'examen de la variation du 2e ordre, on voit que pour qu'il y ait maximum ou minimum, il faut que Q ait un signe invariable et que l'équation (2) admette une intégrale qui garde un signe invariable entre x_0 et x_1. Le maximum correspond au cas où Q est négatif, le minimum à Q positif.

— Nous allons appliquer les conclusions de la théorie précédente à un exemple classique.

Problème. Étant donnés dans un plan 2 points A et B et un axe Ox, faire passer par ces 2 points une courbe telle, qu'en tournant autour de cet axe elle engendre une surface de révolution d'aire minima.

Soient x_0, x_1 les abscisses des 2 points donnés ; l'élément de surface engendré par l'élément linéaire ds d'ordonnée y est : $2\pi y ds$; en intégrant (et négligeant le facteur 2π) on trouve pour la surface totale :

$$S = \int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1+y'^2}\, dx$$

Écrivons la condition pour que δS soit nulle. Comme x manque dans V, on a immédiatement l'intégrale première (page 94) :

$$V - y'\frac{\partial V}{\partial y'} = C^{te} \qquad \text{c.à.d.} \qquad \frac{y}{\sqrt{1+y'^2}} = C_1$$

$$\frac{y^2}{C_1^2} = 1 + y'^2 \qquad \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{y^2}{C_1^2} - 1} \qquad \frac{dx}{C_1} = \frac{\frac{dy}{C_1}}{\sqrt{\frac{y^2}{C_1^2} - 1}}$$

$$\frac{x + C_2}{C_1} = \log\left[\frac{y}{C_1} + \sqrt{\frac{y^2}{C_1^2} - 1}\right] \qquad \frac{y}{C_1} + \sqrt{\frac{y^2}{C_1^2} - 1} = e^{\frac{x+C_2}{C_1}}$$

d'où l'on tire, par un calcul connu, l'équation générale de la chaînette.

$$y = \frac{C_1}{2}\left[e^{\frac{x+C_2}{C_1}} + e^{-\frac{x+C_2}{C_1}}\right]$$



Supposons en particulier A et B symétriques par rapport à l'axe Oy (à la même distance de la base donnée Ox.) La chaînette aura Oy pour axe de symétrie, et son équation se simplifiera :

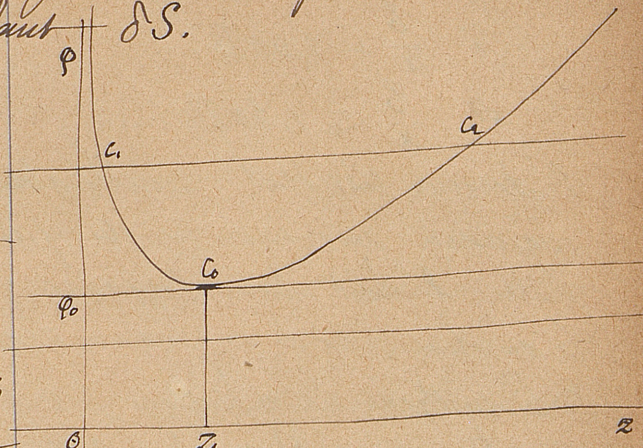
$$y = \frac{c}{2}\left[e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right]$$

Il suffit maintenant de déterminer c de manière que la chaînette passe par B (de coordonnées a, b.) On a ainsi l'équation de condition :

$$b = \frac{c}{2}\left[e^{\frac{a}{c}} + e^{-\frac{a}{c}}\right]$$

qui détermine la constante c. Il s'agit de savoir combien de racines

positives à cette équation : à chaque racine correspondra une chaînette passant par A, B et annulant δS.



Pour cela, posons :

$$\varphi = \frac{z}{2}\left[e^{\frac{a}{z}} + e^{-\frac{a}{z}}\right]$$

et construisons la courbe dont les coordonnées sont φ et z.

Calculons d'abord $\varphi'(z)$; on trouve, en développant les exponentielles en série :

$$\varphi'(z) = 1 - \frac{1}{2}\frac{a^2}{z^2} - \frac{3}{4!}\frac{a^4}{z^4} - \frac{5}{6!}\frac{a^6}{z^6} - \dots\dots$$

On voit que φ' augmente constamment avec $|z|$; pour $z = 0$, $\varphi' = -\infty$; pour $z = +\infty$, $\varphi' = 1$.

La courbe (φ, z) a donc la forme indiquée ; elle a pour asymptote $O\varphi$ et tourne constamment sa concavité vers les y positives ; elle tend à prendre la direction dont le coefficient angulaire est 1.

La fonction φ passe nécessairement par un minimum, et un seul.

L'équation $\varphi'(z) = 0$ a une seule racine positive, z_1, dont la valeur est :

$$\frac{a}{z_1} = 1,199\dots\dots$$

A cette valeur de z correspond le minimum φ_0 de φ, donné par la formule :

$$\frac{\varphi_0}{z_1} = 1,8107\dots\dots$$

d'où l'on conclut :

$$\frac{\varphi_0}{a} = 1,5088\dots\dots$$

Donc, si $b > \varphi_0$, l'équation en c aura 2 racines ; si $b = \varphi_0$, elle n'en aura qu'une ; si $b < \varphi_0$, elle n'en aura pas.

Autrement dit, si $\frac{b}{a} > 1,5088....$ on aura 2 chaînettes ;

si $\frac{b}{a} = 1,5088.....$ on n'aura qu'une chaînette ;

si $\frac{b}{a} < 1,5088.....$ on n'aura pas de solution.

Ce dernier résultat semble absurde, car il est impossible que l'aire engendrée par une courbe quelconque allant de A en B soit nulle ; il doit donc toujours y avoir une courbe répondant à la question, c.à.d. engendrant une surface d'aire minima. La méthode des variations paraît ici tomber en défaut. Nous expliquerons plus loin cette anomalie.

Il nous faut auparavant discuter le maximum ou le minimum de S qui correspond à chacune des 2 solutions. On a d'abord

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} = \frac{y}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Q a un signe invariable pour chacune des 2 chaînettes, car y est toujours positif, et le dénominateur est essentiellement positif. Pour avoir 2 intégrales distinctes de l'équation (2), nous savons qu'il suffit de prendre : $\frac{\partial f}{\partial C_1}$, $\frac{\partial f}{\partial C_2}$. Ici on a :

$$f = \frac{C_1}{2}\left[e^{\frac{x+C_2}{C_1}} + e^{-\frac{x+C_2}{C_1}}\right]$$

Nous prendrons les dérivées en y faisant $C_2 = 0$, $C_1 = c$

$$z_1 = \frac{\partial f}{\partial C_1} = \frac{1}{2}\left[e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right] - \frac{x}{2c}\left[e^{\frac{x}{c}} - e^{-\frac{x}{c}}\right]$$

$$z_2 = \frac{\partial f}{\partial C_2} = \frac{1}{2}\left[e^{\frac{x}{c}} - e^{-\frac{x}{c}}\right]$$

Pour savoir si l'équation (2) admet une intégrale gardant son signe

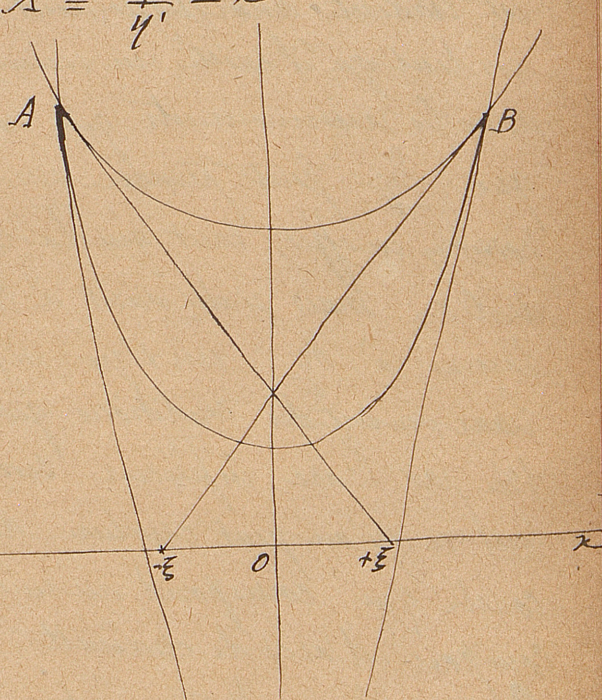
invariable entre x_0 et x_1, on peut étudier le rapport $\frac{z_1}{z_2}$:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}}{e^{\frac{x}{c}} - e^{-\frac{x}{c}}} - \frac{x}{c}$$

Or, $y' = \frac{1}{2}\left[e^{\frac{x}{c}} - e^{-\frac{x}{c}}\right]$ $\frac{z_1}{z_2} = \frac{y}{cy'} - \frac{x}{c} = \frac{1}{c}\left(\frac{y}{y'} - x\right)$

Ce rapport a une interprétation géométrique fort remarquable.
Écrivons l'équation de la tangente : $Y - y = y'(X - x)$
Cherchons l'abscisse du point où elle rencontre Ox ($Y = 0$) :

$$-\frac{y}{y'} = X - x \qquad -X = \frac{y}{y'} - x$$



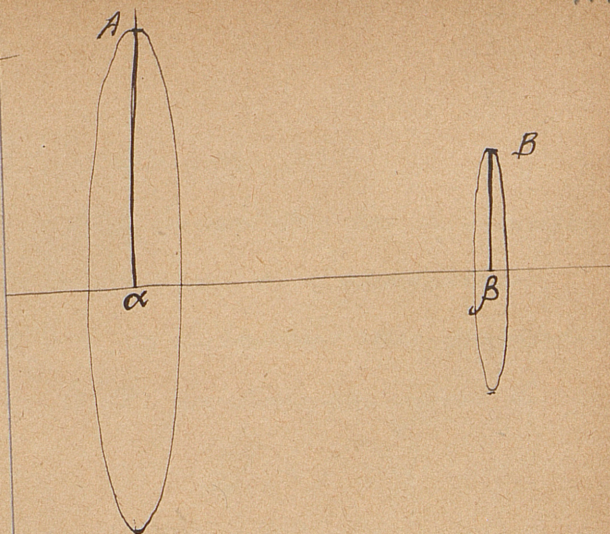
Pour savoir si le rapport $\frac{z_1}{z_2}$ peut prendre toutes les valeurs possibles dans l'intervalle (x_0, x_1) qui est ici $(-a, +a)$, il suffit de chercher si X peut prendre toutes les valeurs possibles quand le point de contact de la tangente se déplace de A en B. En étudiant les 2 chaînettes, on trouve que les tangentes en A et B à la chaînette supérieure se rencontrent au dessus de l'axe des x, et que les tangentes en A et B à la chaînette inférieure se rencontrent au-dessous de Ox. Pour celle-ci, l'abscisse X pourra prendre toutes les valeurs possibles

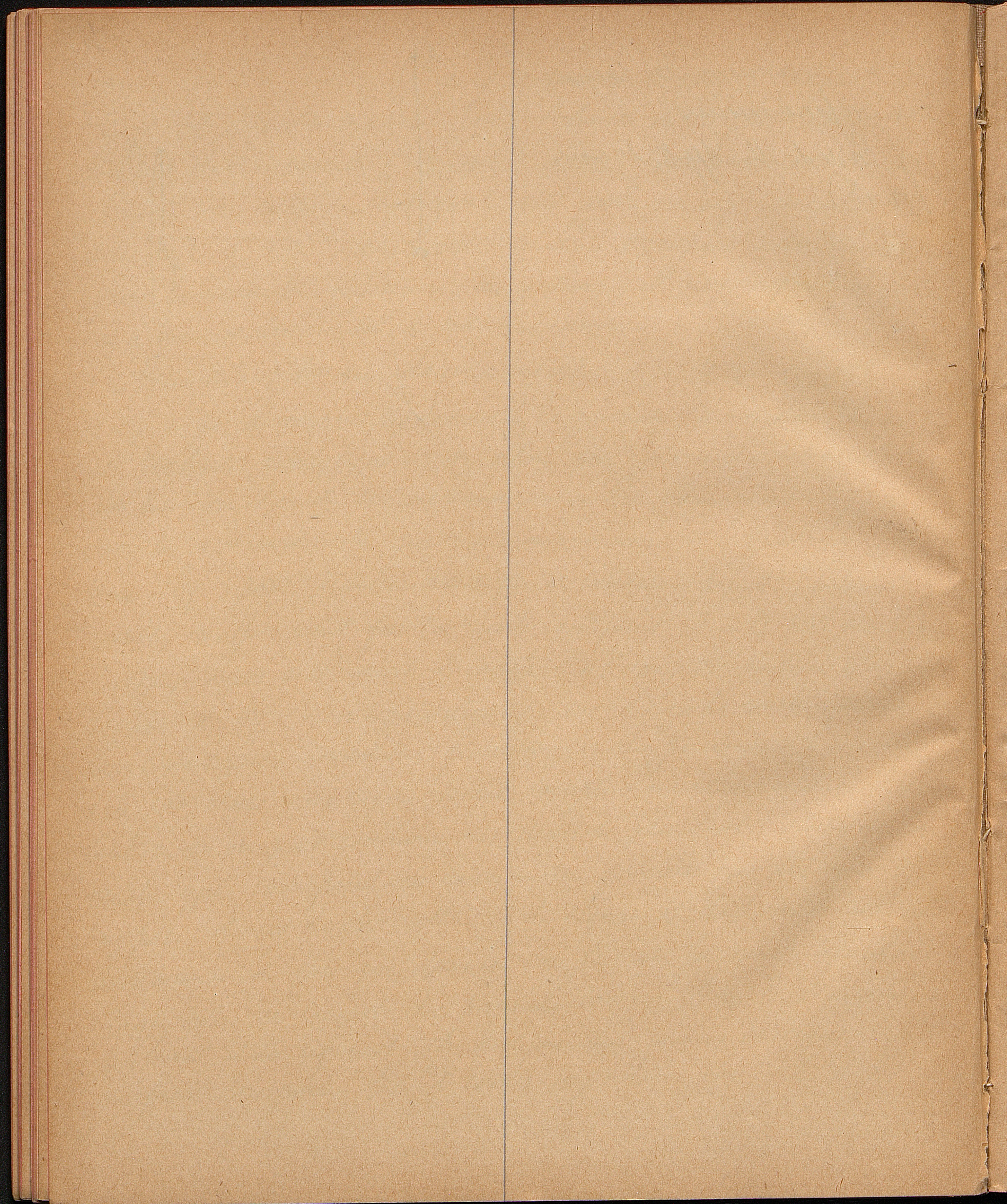
entre $-\infty$ et $+\infty$, en passant 2 fois par les valeurs comprises entre $-\xi$ et $+\xi$, tandis que pour la 2e, l'abscisse X ne peut prendre les valeurs de l'intervalle $(-\xi, +\xi)$. Ainsi, pour la chaînette supérieure il existe une certaine intégrale qui garde un signe invariable entre $-a$ et $+a$; donc cette solution correspond à un minimum. Pour la chaînette inférieure, au contraire, elle ne correspond en général ni à un maximum ni à un minimum.

– Nous avons dit que, dans le cas où : $\frac{b}{a} < 1,5088\ldots$ il n'y a pas de courbe répondant à la question, du moins telle qu'elle est traduite analytiquement, alors que, géométriquement, il est évident qu'il existe un minimum. Or nous avons supposé, dans les raisonnements qui nous ont amenés à l'équation (1), que δy peut prendre un signe arbitraire (page 93). Cela est possible, en effet, tant que la courbe qui joint A et B reste au-dessus de Ox ; mais si elle vient à toucher cet axe, on ne peut plus donner à δy un signe négatif, car dès que la courbe traverse l'axe on sort des conditions géométriques du problème (l'aire engendrée par l'arc inférieur serait comptée négativement). Donc tout ce qu'on peut conclure des résultats précédents, c'est que la courbe qui correspond au minimum géométrique de l'aire se compose d'arcs de chaînette et de segments de l'axe de révolution. On trouve en effet que, dans le cas présent, la courbe répondant à la question se compose des perpendiculaires $A\alpha$, $B\beta$ abaissées sur l'axe, et du segment $\alpha\beta$ de l'axe lui-même, parce que la surface composée des 2 cercles engendrés par αA et βB

~~est un minimum par rapport aux surfaces voisines.~~

(cf. Cours de M. Appell, 2e cahier page 18)





Équations différentielles du premier ordre.

Règle générale : On essaie de séparer les variables par un changement de variables ; l'intégration est alors ramenée à 2 quadratures.

Types généraux qu'on sait intégrer, c.à d. ramener aux quadratures :

I. $M dx + N dy = 0$ M, N fonctions homogènes du même degré en x, y. — On en tire : $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$

On pose : $\frac{y}{x} = t$ $y = tx$ $y' = t'x + t$

$t'x + t = f(t)$ d'où : $\frac{dt}{f(t) - t} = \frac{dx}{x}$.

Cas particuliers : M dépend de l'une, N de l'autre variable, ou M et N dépendent de la même variable : séparation immédiate.

Les équations de la forme : $f\left(x, \varphi(y) \frac{dy}{dx}\right) = 0$ $f\left(y, \varphi(x) \frac{dy}{dx}\right) = 0$ se résolvent par rapport à $\varphi(y)\, y'$ ou $\varphi(x)\, y'$; séparation.

Cas particuliers : $f(x, y') = 0$ $f(y, y') = 0$ on résout par rapport à y', et les variables sont séparées.

II. Équation linéaire : $\frac{dy}{dx} + y f(x) + \varphi(x) = 0$

On cherche un facteur intégrant indépendant de y : soit u :

$$u\, dy + u\left[y f(x) + \varphi(x)\right] dx = 0$$

Exprimons que le 1er membre est différentielle totale exacte, u ne dépendant que de x : $\frac{du}{dx} = u f(x)$ d'où : $\frac{du}{u} = f(x)\, dx$

$u = e^{\int f(x) dx}$ $u\, dy + u y f(x) = d\left[y e^{\int f(x) dx}\right]$ d'où :

$y e^{\int f(x) dx} + \int \varphi(x) e^{\int f(x) dx} dx = C^{te}$ On a y par 2 quadratures.

(voir autre méthode page 17.)

III. Equation de Bernouilli : $\frac{dy}{dx} + y\varphi(x) + y^m f(x) = 0$

On divise par y^m : $\frac{1}{y^m}\frac{dy}{dx} + \frac{1}{y^{m-1}}\varphi(x) + f(x) = 0$

On pose : $\frac{1}{y^{m-1}} = z$; on est ramené à une équation linéaire (II.)

IV. Equation de Riccati dont on connaît une solution particulière y_1 :

$$\frac{dy}{dx} + y^2\varphi(x) + y\,\psi(x) + f(x) = 0$$

se ramène à une équation de Bernouilli en posant : $y = y_1 + z$.

V. Equation s'intégrant par différentiation : $f(x, y, p) = 0$ $p = \frac{dy}{dx}$.

Résolvons par rapport à y. $y = \varphi(x, p)$

Différentions par rapport à x ; $p = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{dp}{dx}$ (1)

Si l'on peut intégrer cette équation du 1er ordre en p, on aura :

$p = \psi(x, C)$ d'où : $y = \varphi[x, \psi(x, C)]$ (2)

Il faut démontrer qu'on obtient ainsi l'intégrale générale de l'éq. proposée.

Différentions (2) : $p = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{d\psi}{dx}$

Or ψ est une intégrale de (1), donc : $\psi = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{d\psi}{dx}$

Donc : $\psi = p$, $y = \varphi(x, \psi) = \varphi(x, p)$ c. q. f. d.

– Autre méthode : résolvons par rapport à x ; $x = \varphi(y, p)$

Différentions par rapport à x ; $1 = p\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{dp}{dx}$

ou : $1 = \frac{\partial\varphi}{\partial y}p + \frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{dp}{dy}p$

équation du 1er ordre en p fonction de y ; si on sait l'intégrer, on a :

$p = f(y, C)$ d'où : $x = \varphi[y, f(y, C)]$

– La variable n'étant pas spécifiée, on peut intervertir x et y ds les 2 méthodes.

VI. Équation semi-homogène : $f(x, y, y') = 0$

On suppose qu'on puisse trouver un nombre r tel que l'on ait identiq[t]:

$$f(x, x^r, x^{r-1}) = x^k f(1, 1, 1)$$

On effectue le changement de variables : $x = e^t$ $y = x^r u$

$\underline{u}$ est considéré comme fonction de $\underline{t}$: $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$ $\frac{du}{dt} = u'$.

$$y' = r x^{r-1} u + x^r \frac{du}{dt} \frac{dt}{dx} = x^{r-1}(ru + u')$$ Substituons :

$$f(x, x^r u, x^{r-1}(ru+u')) = x^k f(1, u, ru+u')$$

On est ramené à l'équation linéaire : $f(1, u, ru+u') = 0$

qui ne contient que u et $\frac{du}{dt}$; on résout par rapport à u' (I.)

On a t en fonction de $\underline{u}$; on substitue : $t = Lx$ $u = \frac{y}{x^r}$.

— Si aucune des méthodes précédentes n'est applicable, on cherche à décomposer l'équation en 2 membres qui soient différentielles exactes —

Quand l'équation est du 2e degré en y', on la résout par rapport à y'.

— Solutions singulières. Soit l'éq. $f(x, y, p) = 0$

A chaque couple de valeurs de (x, y) correspondent en général $\underline{m}$ valeurs distinctes de $\underline{p}$ déterminées par cette équation, et constituant les m branches d'une fonction algébrique ($\underline{m}$ degré de f en p)

Considérons un point $(x_0 y_0)$ où l'éq. a une racine double en p.

Au voisinage de ce point, la théorie générale de l'équation linéaire tombe en défaut, car elle suppose que p est une fonction uniforme.

Eliminons p entre les 2 éq : $f(x, y, p) = 0$ (1) $\frac{\partial f}{\partial p} = 0$ (2)

on obtient une nouvelle équation : $R(x, y) = 0$ (3)

qui définit une fonction y de x : elle représente une courbe C qui est le lieu des points du plan où l'éq (1) proposée a des racines multiples en p.
Il s'agit de savoir si la courbe C est, en totalité ou en partie, une intégrale de l'équation (1) — Une telle intégrale est dite singulière. On va donner le moyen de reconnaître et de trouver l'intégrale singulière, quand elle existe.
— On démontre que tout point de la courbe C pour lequel x, y et le coefficient angulaire y' de la courbe en ce point ne vérifient pas l'éq (1) est un point de rebroussement d'une intégrale ordinaire. Donc toute partie de la courbe C qui n'est pas une intégrale singulière est un lieu des points de rebroussement des intégrales ordinaires (1)

Théorème. Pour qu'il existe une intégrale singulière de l'équation (1), il faut et il suffit que les 3 équations :

(4) $f(x, y, \lambda) = 0$ (5) $\frac{\partial f}{\partial \lambda} = 0$ (6) $\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} = 0$

puissent être vérifiées identiquement par 2 fonctions y et λ de x :

$y = \varphi(x)$ $\lambda = \psi(x)$

L'intégrale singulière est précisément : $y = \varphi(x)$.

En effet, supposons qu'on ait identiquement (quel que soit x) :

(7) $f(x, \varphi, \psi) \equiv 0$ (8) $\frac{\partial f}{\partial \psi} \equiv 0$ (9) $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \varphi} \psi \equiv 0$

On va démontrer l'identité : $\psi \equiv \frac{d\varphi}{dx}$

d'où : $f(x, \varphi, \frac{d\varphi}{dx}) \equiv 0$ ce qui démontre le théorème

Différentions l'identité (7) : $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{d\varphi}{dx} + \frac{\partial f}{\partial \psi}\frac{d\psi}{dx} \equiv 0$

En vertu de (8) : $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{d\varphi}{dx} \equiv 0$ (10)

(à moins que $\frac{d\psi}{dx}$ ne soit infini pour toute valeur de x ; dans ce cas, le théorème tomberait en défaut, et il faudrait vérifier par une substitution directe si φ est une intégrale de l'équation (1).)

(1) Au contraire, toute intégrale singulière est l'enveloppe des intégrales ordinaires (y' est le même)

Retranchons (10) de (9) : $\frac{\partial f}{\partial \varphi}\left(\psi - \frac{d\varphi}{dx}\right) \equiv 0$

Or : $\frac{\partial f}{\partial \varphi} \gtrless 0$ Donc $\psi \equiv \frac{d\varphi}{dx}$ c. q. f. d.

Exemple : <u>Equation de Clairaut</u>. Une courbe est définie par une propriété de sa tangente indépendante du point de contact. Quelle est la forme de l'équation différentielle de cette courbe ? – Eq. de la tangente :

$Y - y = p(X - x)$ $\qquad Y = pX + y - px$

La propriété s'exprime par une relation entre les coefficients :

$$f(p,\ y - px) = 0$$

Résolvons par rapport à $y - px$: $\qquad y - px = \varphi(p)$

Intégrons par différentiation : $\qquad y = px + \varphi(p)$

$p = p + x\frac{dp}{dx} + \varphi'(p)\frac{dp}{dx}$ $\qquad \left[x + \varphi'(p)\right]\frac{dp}{dx} = 0$

Or : $x + \varphi'(p) \gtrless 0$ Donc $\frac{dp}{dx} = 0$ $\quad p = C$ $\quad y = Cx + \varphi(C)$

équation d'une droite dépendant d'un paramètre. On retrouve les tangentes elles mêmes, car elles jouissent de la propriété indiquée : ce sont les intégrales ordinaires. La courbe cherchée est l'enveloppe des intégrales ordinaires, c à d. l'intégrale singulière. Cherchons-la :

$f(\lambda,\ y - \lambda x) = 0$ $\qquad \frac{\partial f}{\partial \lambda} + \frac{\partial f}{\partial (y - \lambda x)}(-x) = 0$ $\qquad \frac{\partial f}{\partial (y-\lambda x)}(-\lambda) + \frac{\partial f}{\partial (y - \lambda x)}\lambda = 0$

La dernière éq. est une identité. Il existe donc toujours 2 fonctions y, λ vérifiant les 2 premières. Résolvons les par rapport à y et λ. La solution singulière s'obtiendra en éliminant le paramètre λ entre ces 2 éq. d'où les équations :

$y = \lambda x + \varphi(\lambda)$ $\qquad x + \varphi'(\lambda) = 0$

$x = -\varphi'(\lambda)$ $\qquad y = -\lambda\varphi'(\lambda) + \varphi(\lambda)$

qui définissent la courbe cherchée au moyen du paramètre λ.

— Équations différentielles d'ordre supérieur au 1er. On cherche à les abaisser.

Méthodes d'abaissement :

I. La variable indépendante manque : $f(y, y', y'', \dots y^{m}) = 0$

On prend y pour nouvelle variable, $y' = p$ pour nouvelle fonction :

$y'' = \frac{dp}{dy} p$ $\quad y''' = \frac{d^2p}{dy^2} p^2 + \left(\frac{dp}{dy}\right)^2 p$ etc. On obtient :

$$F(y, p, p', p'', \dots p^{m-1}) = 0$$

Si l'on peut intégrer cette éq. de l'ordre $(m-1)$, on trouve $p = \varphi(y)$ d'où : $x = \int \frac{dy}{\varphi(y)}$ par une quadrature.

II. La fonction manque : $f(x, y^{p}, y^{p+1}, \dots y^{m}) = 0$

On prend pour nouvelle fonction la dérivée la plus basse : $y^{p} = u$; on obtient : $f(x, u, u', u'', \dots u^{m-p}) = 0$

équation d'ordre $(m-p)$. Si l'on sait l'intégrer, on aura y par p quadratures : $u = \varphi(x)$ $\quad y^{p-1} = \int \varphi(x)\,dx$ ......

III. Équation semi-homogène : $f(x, y, y', y'', \dots y^{m}) = 0$

On suppose qu'on puisse trouver un nombre r tel qu'on ait identiquement :

$$f(x, x^{r}, x^{r-1}, x^{r-2}, \dots x^{r-m}) = x^{k} f(1, 1, 1, 1, \dots 1)$$

On fait alors le changement de variables : $x = e^{t}$ $\quad y = x^{r} u$

t étant la nouvelle variable, u la nouvelle fonction ; $u' = \frac{du}{dt}$

$y' = x^{r-1}(ru + u')$ $\quad y'' = x^{r-2}\left(r(r-1)u + (2r-1)u' + u''\right)$ .... etc

y^{p} contient en facteur : x^{r-p} — L'équation devient, en supprimant le facteur x^{k} : $f(1, u, ru+u', r(r-1)u + (2r-1)u' + u'', \dots) = 0$

ou : $F(u, u', u'', \dots u^{m}) = 0$ qui ne contient pas t et qu'on abaisse par la méthode (I.)

Equations différentielles linéaires.

Une équation différentielle linéaire d'ordre m est de la forme :

$$A_0 \frac{d^m y}{dx^m} + A_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \dots\dots + A_{m-1} \frac{dy}{dx} + A_m y = B$$

$A_0, A_1, \dots A_m, B$ étant des fonctions de x seulement. Posons :

$$A_0 z^m + A_1 z^{m-1} + \dots\dots + A_{m-1} z + A_m = f(z)$$

Considérons le symbole opératif :

$$A_0 \frac{d^m \dots}{dx^m} + A_1 \frac{d^{m-1} \dots}{dx^{m-1}} + \dots\dots + A_{m-1} \frac{d \dots}{dx} + A_m$$

On peut l'écrire, pour abréger : $f\left(\frac{d}{dx}\right)$
et le multiplier par la fonction à laquelle il s'applique, c.à.d. ajouter la lettre y dans chaque terme comme un facteur. L'équation linéaire pourra s'écrire symboliquement : $f\left(\frac{d}{dx}\right) y = B$.

Propriétés de ce symbole : 1° $f\left(\frac{d}{dx}\right)(y+z) = f\left(\frac{d}{dx}\right) y + f\left(\frac{d}{dx}\right) z$.

2° $f\left(\frac{d}{dx}\right)(y + C) = f\left(\frac{d}{dx}\right) y + A_m C$ (cas particulier de 1°)

3° $f\left(\frac{d}{dx}\right) Cy = C f\left(\frac{d}{dx}\right) y$ (cas particulier de 4°.)

4° $f\left(\frac{d}{dx}\right) yz = z f\left(\frac{d}{dx}\right) y + \frac{dz}{dx} \frac{f'}{1}\left(\frac{d}{dx}\right) y + \dots + \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} \frac{f^{m-1}}{(m-1)!}\left(\frac{d}{dx}\right) y + \frac{d^m z}{dx^m} \frac{f^m}{m!}\left(\frac{d}{dx}\right) y$

– Théorème. Etant donnée l'éq. linéaire : $f\left(\frac{d}{dx}\right) y = B$
si l'on en connaît une solution particulière y_1, on est ramené à intégrer l'équation homogène (sans second membre) : $f\left(\frac{d}{dx}\right) y = 0$.

En effet, posons : $y = y_1 + z$ z nouvelle fonction inconnue :

$f\left(\frac{d}{dx}\right)(y_1 + z) = f\left(\frac{d}{dx}\right) y_1 + f\left(\frac{d}{dx}\right) z = B$ Or : $f\left(\frac{d}{dx}\right) y_1 = B$.

Donc z vérifie l'équation : $f\left(\frac{d}{dx}\right) z = 0$.

Équations linéaires homogènes.

Définition. Étant donné l'éq. linéaire homogène d'ordre m $f\left(\frac{d}{dx}\right)y = 0$ on appelle système fondamental d'intégrales un système de m intégrales: $y_1 \; y_2 \ldots\ldots y_m$ telles que le déterminant:

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots\ldots & y_m \\ y_1' & y_2' & \ldots\ldots & y_m' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(m-1)} & y_2^{(m-1)} & \ldots\ldots & y_m^{(m-1)} \end{vmatrix}$$

soit différent de zéro.

Théorème. L'intégrale générale de cette équation est alors:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots\ldots + C_m y_m$$

$C_1, C_2, \ldots\ldots C_m$ étant m constantes arbitraires.

Il suffit de démontrer que, y étant une intégrale quelconque de cette éq. il existe une relation de cette forme entre y et les m intégrales du système fondamental. Écrivons que ces $(m+1)$ fonctions vérifient l'équation:

$$f\left(\frac{d}{dx}\right)y = 0 \quad f\left(\frac{d}{dx}\right)y_1 = 0 \quad f\left(\frac{d}{dx}\right)y_2 = 0 \ldots\ldots\ldots f\left(\frac{d}{dx}\right)y_m = 0$$

On peut considérer ces identités comme $(m+1)$ équations linéaires entre les $(m+1)$ inconnues: $A_0, A_1, A_2, \ldots\ldots A_m$. Comme elles ne sont pas toutes nulles, il faut que le déterminant complet de leurs coefficients soit identiquement nul:

$$\begin{vmatrix} y & y_1 & y_2 & \ldots\ldots & y_m \\ y' & y_1' & y_2' & \ldots\ldots & y_m' \\ y'' & y_1'' & y_2'' & \ldots\ldots & y_m'' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y^m & y_1^m & y_2^m & \ldots\ldots & y_m^m \end{vmatrix} \equiv 0$$

Cela prouve qu'il existe une même relation linéaire et homogène entre les éléments de chaque ligne, c.à.d. que l'on a les $(m+1)$ ~~équations~~ identités:

$$\lambda y + \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \ldots\ldots\ldots + \lambda_m y_m = 0$$

$$\lambda y' + \lambda_1 y_1' + \lambda_2 y_2' + \dots\dots\dots + \lambda_m y_m' = 0$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\lambda y^m + \lambda_1 y_1^m + \lambda_2 y_2^m + \dots\dots\dots + \lambda_m y_m^m = 0$$

D'ailleurs : $\lambda \gtrless 0$, car c'est le mineur relatif à y^m : $\lambda = \Delta \gtrless 0$, par hypothèse. On peut donc diviser par λ et écrire :

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots\dots\dots + C_m y_m$$

$$y' = C_1 y_1' + C_2 y_2' + \dots\dots\dots + C_m y_m'$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$y^m = C_1 y_1^m + C_2 y_2^m + \dots\dots\dots + C_m y_m^m$$

Reste à prouver que les nouveaux coefficients $C_1 C_2 \dots C_m$ (quotients de $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_m$ par $-\lambda$) sont des constantes. Différentions chacune des m premières identités en tenant compte de la suivante :

$$0 = C_1' y_1 + C_2' y_2 + \dots\dots\dots + C_m' y_m$$

$$0 = C_1' y_1' + C_2' y_2' + \dots\dots\dots + C_m' y_m'$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$0 = C_1' y_1^{m-1} + C_2' y_2^{m-2} + \dots\dots\dots + C_m' y_m^{m-1}$$

On a ainsi un système de m équations à m inconnues dont le déterminant est : $\Delta \gtrless 0$. On doit donc avoir identiquement :

$C_1' = 0 \quad C_2' = 0 \quad \dots\dots\dots \quad C_m' = 0$ c. q. f. d.

Corollaire : L'intégration d'une équation linéaire homogène se ramène à la recherche d'un système fondamental d'intégrales.

Théorème : Si : $y_1 y_2 \dots y_m$ forment un système fondamental, et si le déterminant :

$$R = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1m} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{m1} & C_{m2} & \dots & C_{mm} \end{vmatrix}$$

dont les éléments sont m^2 constantes arbitraires, n'est pas nul, les m fonctions suivantes :

$$z_1 = C_{11} y_1 + C_{12} y_2 + \dots\dots + C_{1m} y_m$$
$$z_2 = C_{21} y_1 + C_{22} y_2 + \dots\dots + C_{2m} y_m$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$z_m = C_{m1} y_1 + C_{m2} y_2 + \dots\dots + C_{mm} y_m$$

forment un nouveau système fondamental. En effet, si l'on forme le déterminant Δ' de ces m fonctions et de leurs $(m-1)$ premières dérivées, on trouve : $\Delta' = R\Delta$ donc : $\Delta' \gtrless 0$.

Corollaire : Il y a une infinité de systèmes fondamentaux.

Théorème : Si l'on connaît une intégrale y_1 d'une équation linéaire homogène, on peut abaisser son ordre d'une unité.

Posons : $y = y_1 z$ z est la nouvelle fonction inconnue

On a la nouvelle équation : $f(\frac{d}{dx}) y_1 z = 0$

Or le coefficient de z dans cette équation linéaire par rapport à z est : $f(\frac{d}{dx}) y_1 \equiv 0$ par hypothèse ; donc l'équation ne contient pas la fonction inconnue, et l'on peut l'abaisser en posant : $z' = u$ (méthode II.)

Si u est l'intégrale générale de la nouvelle équation linéaire d'ordre $(m-1)$ l'intégrale générale de la proposée sera : $y = y_1 \int u dx$

De même, si l'on connaît une solution particulière de l'équation d'ordre $(m-1)$ on pourra l'abaisser par le même procédé, et ainsi de suite ; si l'on peut arriver ainsi jusqu'à l'ordre 1, qu'on sait intégrer on aura m solutions particulières : $y_1\ y_2 \dots y_m$; on peut démontrer qu'elles forment un système fondamental.

Revenons aux équations linéaires complètes, non homogènes.

Théorème : Lorsqu'on connaît l'intégrale générale d'une équation sans second membre, on obtient l'intégrale générale de l'équation avec 2e membre par m quadratures (Méthode de la variation des constantes arbitraires.)

Soit l'équation non homogène $f\left(\frac{d}{dx}\right)y = B$ (1)

et soient : $y_1\, y_2 \ldots\ldots y_m$ un système fondamental de l'équation homogène correspondante : $f\left(\frac{d}{dx}\right)y = 0$

Cherchons une solution particulière de l'éq. (1) de la forme suivante :

$$y = u_1 y_1 + u_2 y_2 + \ldots\ldots + u_m y_m$$

$u_1, u_2, \ldots\ldots u_m$ étant m fonctions de x. Comme on introduit m fonctions nouvelles on peut les assujettir à $(m-1)$ relations arbitraires ; elles équivaudront à une seule fonction qui sera déterminée par l'équation (1). Choisissons donc ces m fonctions de telle sorte que les $(m-1)$ premières dérivées de y soient les mêmes que si $u_1\, u_2 \ldots\ldots u_m$ étaient des constantes ; on a $(m-1)$ conditions :

$$(2)\begin{cases} u_1' y_1 + u_2' y_2 + \ldots\ldots\ldots + u_m' y_m = 0 \\ u_1' y_1' + u_2' y_2' + \ldots\ldots\ldots + u_m' y_m' = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_1' y_1^{m-2} + u_2' y_2^{m-2} + \ldots\ldots\ldots + u_m' y_m^{m-2} = 0 \end{cases}$$

Cherchons une dernière relation qui exprime que y est une intégrale : or on a identiquement : $f\left(\frac{d}{dx}\right)y = A_0 \frac{d^m y}{dx^m} + f_1\left(\frac{d}{dx}\right)y$

f_1 étant une expression linéaire en y d'ordre $(m-1)$; on a donc :

$$f_1\left(\frac{d}{dx}\right)y = u_1 f_1\left(\frac{d}{dx}\right)y_1 + u_2 f_1\left(\frac{d}{dx}\right)y_2 + \ldots\ldots + u_m f_1\left(\frac{d}{dx}\right)y_m$$

D'autre part : $\frac{d^m y}{dx^m} = \frac{d}{dx}\left(u_1 y_1^{m-1} + u_2 y_2^{m-1} + \ldots\ldots + u_m y_m^{m-1}\right) =$

$u_1 y_1^m + u_2 y_2^m + \ldots\ldots\ldots + u_m y_m^m + u_1' y_1^{m-1} + u_2' y_2^{m-1} + \ldots\ldots + u_m' y_m^{m-1}$

Donc : $f\left(\frac{d}{dx}\right)y = A_0\left(u_1' y_1^{m-1} + u_2' y_2^{m-1} + \ldots\ldots + u_m' y_m^{m-1}\right) + u_1 f\left(\frac{d}{dx}\right)y_1 + u_2 f\left(\frac{d}{dx}\right)y_2 + \ldots + u_m f\left(\frac{d}{dx}\right)y_m$

Or les coefficients de $u_1\, u_2 \ldots u_m$ sont nuls par hypothèse ; la condition pour que y soit intégrale se réduit à : $A_0\left(u_1' y_1^{m-1} + u_2' y_2^{m-1} + \ldots\ldots + u_m' y_m^{m-1}\right) = B$ (3)

Cette éq. (3) jointe aux éq. (2) forme un système de m équations linéaires qui déterminent les m inconnues : $u_1' \; u_2' \ldots\ldots u_m'$

Elles admettent un système de solutions, et un seul, car le déterminant des coefficients des inconnues est : $A_0 \Delta \gtrless 0$.

En les résolvant, on obtiendra : $u_1' = \varphi_1(x) \ldots\ldots\ldots u_m' = \varphi_m(x)$

On aura une intégrale particulière en prenant :

$$u_1 = \int \varphi_1\, dx \qquad u_2 = \int \varphi_2\, dx \quad \ldots\ldots\ldots \quad u_m = \int \varphi_m\, dx$$

Il suffira de lui ajouter l'intégrale générale de l'équation homogène pour avoir l'intégrale générale de l'éq. (1) ; mais cela revient à faire figurer dans $u_1 \cdot u_2 \ldots\ldots u_m$ une constante arbitraire d'intégration. On a donc bien m constantes arbitraires dans l'intégrale générale.

— Application à l'équation du 1er ordre : $\dfrac{dy}{dx} + y\, f(x) + \varphi(x) = 0$

Équation sans second membre : $\dfrac{dy}{dx} + y\, f(x) = 0$

$\dfrac{dy}{y} = -f(x)\, dx$ Intégrale : $y = C e^{-\int f(x)\, dx}$

Pour avoir une intégrale particulière de l'équation complète, supposons C fonction de x :

$$\frac{dC}{dx} \cdot e^{-\int f(x) dx} + \varphi(x) = 0$$

d'où en intégrant : $C = -\int \varphi(x)\, e^{\int f(x) dx}\, dx$

Intégrale générale : $y = -e^{-\int f(x) dx} \int \varphi(x)\, e^{\int f(x) dx}\, dx$

La constante d'intégration est contenue dans la 2e quadrature, celle de la 1e quadrature $\int f(x)\, dx$ s'élimine d'elle-même : car le facteur e^k contenu dans la 2e quadrature est détruit par le facteur correspondant e^{-k} qui provient de la 1e exponentielle.

— Équation linéaire à coefficients constants.

Pour avoir un système fondamental, on cherche des intégrales de la forme :

$$y = e^{rx} \quad \text{d'où :} \quad y' = re^{rx} \quad y'' = r^2 e^{rx} \ldots\ldots \quad y^{m} = r^m e^{rx}$$

On a identiquement : $\quad f\left(\frac{d}{dx}\right) e^{rx} = e^{rx} f(r)$

Pour que e^{rx} soit une intégrale de l'éq. homogène : $\quad f\left(\frac{d}{dx}\right) y = 0$, il faut et il suffit que $\underline{r}$ soit racine de l'équation : $\quad f(r) = 0$ algébrique du degré $\underline{m}$, qu'on appelle équation caractéristique.

— 1er Cas. — L'équation caractéristique a ses $\underline{m}$ racines distinctes : soient : $r_1\, r_2 \ldots r_m$ — Dans ce cas, les exponentielles :

$$e^{r_1 x},\ e^{r_2 x}, \ldots\ldots e^{r_m x}$$

forment un système fondamental. En effet, le déterminant de ces $\underline{m}$ intégrales est :

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^{r_1 x} & e^{r_2 x} & \ldots\ldots & e^{r_m x} \\ r_1 e^{r_1 x} & r_2 e^{r_2 x} & \ldots\ldots & r_m e^{r_m x} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r_1^{m-1} e^{r_1 x} & r_2^{m-1} e^{r_2 x} & \ldots\ldots & r_m^{m-1} e^{r_m x} \end{vmatrix} = e^{\Sigma r x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots\ldots & 1 \\ r_1 & r_2 & \ldots\ldots & r_m \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r_1^{m-1} & r_2^{m-1} & \ldots\ldots & r_m^{m-1} \end{vmatrix}$$

Ce dernier déterminant (dit de Van der Monde) est égal au produit :

$\pm \Pi (r_i - r_k)$ où r_i et r_k sont les m racines prises 2 à 2

Comme par hypothèse elles sont toutes distinctes, ce déterminant n'est pas nul ; donc : $\Delta \gtrless 0$. L'intégrale générale de l'éq. homogène est donc :

$$\sum_{k=1}^{k=m} C_k e^{r_k x}$$

— 2e Cas. — Soit $\underline{r}$ une racine multiple d'ordre $\underline{p}$ de l'éq. caractéristique. On va prouver que : $\quad e^{rx},\ xe^{rx},\ x^2 e^{rx}, \ldots\ldots x^{p-1} e^{rx}$ sont $\underline{p}$ intégrales de l'équation proposée. Cela est démontré pour e^{rx}.

Il suffit de prouver que $x^k e^{rx}$ est une intégrale, pour $k=1, 2, \dots p-1$.
Or, si :

$$y = x^k e^{rx}$$
$$y' = x^k r e^{rx} + k x^{k-1} e^{rx}$$
$$y'' = x^k r^2 e^{rx} + 2kr x^{k-1} e^{rx} + k(k-1) x^{k-2} e^{rx}$$
$$y''' = x^k r^3 e^{rx} + 3kr^2 x^{k-1} e^{rx} + 3k(k-1) r x^{k-2} e^{rx} + k(k-1)(k-2) x^{k-3} e^{rx}$$
$$\dots\dots\dots$$
$$y^k = x^k r^k e^{rx} + \frac{k}{1} x^{k-1} k r^{k-1} e^{rx} + \frac{k(k-1)}{1.2} x^{k-2} k(k-1) r^{k-2} e^{rx} + \dots\dots + k! e^{rx}$$

Les dérivées suivantes n'ont que $(k+1)$ termes, comme y^k. Formons :

$$f\left(\frac{d}{dx}\right) y = x^k e^{rx} f(r) + k x^{k-1} e^{rx} f'(r) + \frac{k(k-1)}{} x^{k-2} e^{rx} f''(r) + \dots + k! e^{rx} f^k(r)$$

On voit que pour $k \leq p-1$, cette expression est identiquement nulle, puisque par hypothèse : $f(r) = 0$, $f'(r) = 0$, $f''(r) = 0$, ... $f^{p-1}(r) = 0$.

On a donc p intégrales distinctes pour chaque racine d'ordre p. On peut résumer ce résultat en disant que si r est une racine d'ordre p, $e^{rx} . P(x)$ est une intégrale de l'éq. homogène, P désignant le polynôme le plus général du degré $(p-1)$, et contenant par suite p constantes arbitraires ; car cela équivaut à faire la somme des p intégrales particulières en affectant chacune d'elles d'un coefficient arbitraire :

$$C_0 e^{rx} + C_1 x e^{rx} + C_2 x^2 e^{rx} + \dots\dots + C_{p-1} x^{p-1} e^{rx} = e^{rx} . P(x)$$

Puisque qu'à chaque racine d'ordre p de l'équation caractéristique correspondent p intégrales distinctes, l'équation d'ordre m aura toujours m intégrales distinctes, et son intégrale générale sera de la forme :

$$\Sigma . e^{rx} . P(x)$$

avec m constantes arbitraires, la somme étant étendue à toutes les racines de l'éq. caractéristique. (On démontrerait que ces m intégrales forment un système fondamental.) Ainsi, dans tous les cas, on obtient l'intégrale générale de l'éq homogène en résolvant l'éq. algébrique $f(r) = 0$.

Remarque pour le cas des racines imaginaires — Supposons que l'éq. (caractéristique) admette une racine imaginaire d'ordre p : $r = \alpha + \beta i$

$f(r)$ ayant ses coefficients réels, elle admet aussi la racine conjuguée : $\alpha - \beta i$ au même ordre p de multiplicité. L'intégrale générale contiendra les 2 termes suivants : $e^{(\alpha+\beta i)x} P(x) + e^{(\alpha-\beta i)x} P_1(x)$

Pour les transformer en une expression réelle, il faut que ces 2 termes soient des quantités imaginaires conjuguées ; prenons par exemple 2 termes correspondants : $C_k x^k e^{(\alpha+\beta i)x} + C'_k x^k e^{(\alpha-\beta i)x}$

Posons : $C_k = \gamma_k + i\delta_k$ $\quad C'_k = \gamma_k - i\delta_k$

nous substituons ainsi aux constantes C les constantes réelles γ_k, δ_k.

La somme devient : $x^k e^{\alpha x}\left[\gamma_k\left(e^{\beta i x} + e^{-\beta i x}\right) + i\delta_k\left(e^{\beta i x} - e^{-\beta i x}\right)\right]$

ou : $x^k e^{\alpha x}\left[2\gamma_k \cos\beta x - 2\delta_k \sin\beta x\right]$ sous forme réelle

ou plus simplement : $x^k e^{\alpha x}\left(\Gamma_k \cos\beta x + \Delta_k \sin\beta x\right)$

En ajoutant les termes semblables correspondant aux diverses valeurs de k, on obtient l'intégrale générale sous forme réelle :

$$e^{\alpha x}\cos\beta x\, Q(x) + e^{\alpha x}\sin\beta x\, Q_1(x)$$

Q, Q_1 étant 2 polynômes de degré $(p-1)$ à coefficients arbitraires —

Résumé. Pour avoir l'intégrale générale de l'équation homogène à coefficients constants : $f\left(\frac{d}{dx}\right)y = 0$

on résout l'équation caractéristique : $f(r) = 0$ et l'on forme :

$$\sum e^{rx} P(x) + \sum e^{\alpha x}\left[\cos\beta x\, Q(x) + \sin\beta x\, Q_1(x)\right]$$

r désignant une racine réelle d'ordre p, P un polynôme de degré $(p-1)$; $(\alpha+\beta i)$, $(\alpha-\beta i)$ 2 racines imaginaires conjuguées d'ordre q ; Q, Q_1 2 polynômes de degré $(q-1)$. En particulier, si p ou $q = 1$, le polynôme se réduit à une constante

Équation linéaire à coefficients constants, non homogène: $f\left(\frac{d}{dx}\right)y = B$.
En général, on trouve une intégrale particulière de cette équation par la méthode de la variation des constantes arbitraires.

Cas particuliers où l'on peut trouver une intégrale particulière:

1° B est une constante. On a l'intégrale particulière (constante):

$$y = \frac{B}{A_m} \qquad \text{car: } y' = 0 \quad y'' = 0 \quad \ldots\ldots \quad A_m y = B.$$

2° $B = e^{ax} P(x)$ $\qquad$ P polynôme en x. Deux cas:

A. a n'est pas racine de l'équation caractéristique. On cherche alors une intégrale de la forme: $\quad e^{ax} Q(x)$

Q étant un polynôme de même degré que P. — Substituons:

$$y = e^{ax} Q(x)$$
$$y' = a e^{ax} Q + e^{ax} Q'$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y^{k} = a^{k} e^{ax} Q + \frac{k}{1} a^{k-1} e^{ax} Q' + \frac{k(k-1)}{1.2} a^{k-2} e^{ax} Q'' + \ldots\ldots$$

$$f\left(\frac{d}{dx}\right) e^{ax} Q(x) \equiv e^{ax}\left[Q(x) f(a) + Q' f'(a) + Q'' f''(a) + \ldots + Q^{p} f^{p}(a)\right]$$

p étant le degré commun de P et de Q. — Pour que $e^{ax} Q(x)$ soit une intégrale, il faut et il suffit qu'on ait identiquement:

$$Q(x) f(a) + Q' f'(a) + Q'' f''(a) + \ldots + Q^{p} f^{p}(a) = P(x)$$

Or Q contient $(p+1)$ coefficients arbitraires. En égalant les coefficients de la même puissance de x dans les 2 membres, on obtiendra $(p+1)$ équations du 1er degré qui détermineront ces $(p+1)$ coefficients.
On peut affirmer que le polynôme Q sera toujours déterminé par ces équations, car on peut les résoudre successivement, la 1re ne contenant qu'une inconnue, et chacune des suivantes n'en contenant qu'une nouvelle.
Soit le polynôme donné: $P(x) = \alpha_0 x^{p} + \alpha_1 x^{p-1} + \ldots + \alpha_{p-1} x + \alpha_p$

Posons le polynôme cherché : $Q(x) = C_0 x^p + C_1 x^{p-1} + \dots + C_{p-1} x + C_p$

Égalons les coefficients de x^p : $C_0 f(a) = \alpha_0$

et comme par hypothèse : $f(a) \gtrless 0$, $C_0 = \frac{\alpha_0}{f(a)}$

Égalons les coefficients de x^{p-1} : $C_1 f(a) + p C_0 f'(a) = \alpha_1$

et portons dans cette équation la valeur trouvée pour C_0. Comme $f(a) \gtrless 0$, on en tirera C_1 ; on portera C_0 et C_1 dans la suivante :

$$C_2 f(a) + (p-1) C_1 f'(a) + p(p-1) C_0 f''(a) = \alpha_2$$

d'où C_2, et ainsi de suite jusqu'à C_p, le coefficient de la nouvelle inconnue étant toujours $f(a)$.

On peut aussi remarquer (ce qui revient au même) que si l'on forme le déterminant des coefficients de $C_0, C_1, C_2, \dots C_p$, il se réduit à sa diagonale car tous les éléments situés au-dessus sont nuls. Tous les éléments de la diagonale étant égaux à $f(a)$, le déterminant a pour valeur : $[f(a)]^{p+1} \gtrless 0$.

B. a est une racine d'ordre K de l'équation caractéristique. On a :

$$f(a) = 0 \quad f'(a) = 0 \quad \dots\dots \quad f^{K-1}(a) = 0$$

On cherche une intégrale de la forme : $e^{ax} Q(x)$

Q étant un polynôme de degré $(p+K)$. En substituant, on trouve :

$$f\left(\frac{d}{dx}\right) e^{ax} Q(x) \equiv e^{ax} \Big[Q(x) f(a) + Q' f'(a) + \dots\dots + Q^{K-1} f^{K-1}(a)$$
$$+ Q^K f^K(a) + \dots\dots + Q^{p+K} f^{p+K}(a) \Big]$$

Or, par hypothèse, tous les termes de la 1re ligne sont nuls ; il reste la 2e ligne. Pour que $e^{ax} Q(x)$ soit une intégrale, il faut et il suffit qu'on ait : $Q^K f^K(a) + Q^{K+1} f^{K+1}(a) + \dots\dots + Q^{p+K} f^{p+K}(a) \equiv P(x)$

Cette identification est possible, car le 1er membre est du degré p au plus.

En supposant que $P(x)$ a la même forme que plus haut, et que le polynôme cherché est :
$$Q(x) = C_0 x^{p+k} + C_1 x^{p+k-1} + \ldots\ldots + C_p x^k + C_{p+1} x^{k-1} + \ldots\ldots + C_{p+k-1} x + C_{p+k}$$
on a, en égalant les coefficients de x^p dans les 2 membres :
$$(p+k)(p+k-1)\ldots\ldots(p+1)\, C_0 f^k(a) = \alpha_0$$
et comme par hypothèse $f^k(a) \gtrless 0$, on tire de cette équation une valeur bien déterminée de C_0 ; on calcule ensuite de proche en proche $C_1\, C_2 \ldots\ldots C_p$.
Les autres coefficients : $C_{p+1} \ldots\ldots C_{p+k}$ resteront indéterminés ; en effet :
$$e^{ax}\left[C_{p+1} x^{k-1} + C_{p+2} x^{k-2} + \ldots\ldots + C_{p+k-1} x + C_{p+k}\right]$$
est une intégrale de l'équation sans second membre, avec k constantes arbitraires. On voit qu'il suffit de chercher un polynôme Q de degré $(p+k)$ et dont le terme de moindre degré soit du degré k.

Dans tous les cas, on obtient une intégrale particulière en résolvant $(p+1)$ équations du 1er degré, et sans quadratures.

— <u>Cas particulier</u> : Si $a = 0$, $\quad B = P(x)$.
Il faut chercher une intégrale de la forme : $\quad y = Q(x)$
Q étant un polynôme de degré $(p+k)$, p étant le degré de P, et k l'ordre de multiplicité de la racine 0 dans l'équation caractéristique

— <u>Théorème</u> ; Étant donnée l'éq. $\quad f\left(\frac{d}{dx}\right) y = B_1 + B_2 + B_3$
si y_1, y_2, y_3 sont 3 intégrales particulières respectivt des 3 éq. :
$$f\left(\frac{d}{dx}\right) y = B_1 \qquad f\left(\frac{d}{dx}\right) y = B_2 \qquad f\left(\frac{d}{dx}\right) y = B_3$$
$y_1 + y_2 + y_3$ est une intégrale particulière de l'éq. proposée.
En effet, $f\left(\frac{d}{dx}\right)(y_1 + y_2 + y_3) = f\left(\frac{d}{dx}\right) y_1 + f\left(\frac{d}{dx}\right) y_2 + f\left(\frac{d}{dx}\right) y_3 = B_1 + B_2 + B_3$.

<u>Application</u>. Soit à trouver une intégrale particulière de l'équation :
$$f\left(\frac{d}{dx}\right) y = e^{a_1 x} P_1(x) + e^{a_2 x} P_2(x) + e^{a_3 x} P_3(x)$$

Il suffira de chercher 3 intégrales particulières des 3 équations :

$$f\left(\frac{d}{dx}\right)y = e^{a_1 x} P_1(x) \qquad f\left(\frac{d}{dx}\right)y = e^{a_2 x} P_2(x) \qquad f\left(\frac{d}{dx}\right)y = e^{a_3 x} P_3(x)$$

et d'en faire la somme.

— Cherchons, par cette méthode, une intégrale particulière de l'équation :

$$f\left(\frac{d}{dx}\right)y = e^{\alpha x}\cos\beta x . P(x) = \frac{1}{2} e^{(\alpha+\beta i)x} P(x) + \frac{1}{2} e^{(\alpha-\beta i)x} P(x)$$

On est ramené à chercher une intégrale particulière de chacune des 2 éq :

$$f\left(\frac{d}{dx}\right)y = \frac{1}{2} e^{(\alpha+\beta i)x} P(x) \qquad f\left(\frac{d}{dx}\right)y = \frac{1}{2} e^{(\alpha-\beta i)x} P(x)$$

Soit : $e^{(\alpha+\beta i)x} Q(x)$ une intégrale particulière de la 1e, il est évident que : $e^{(\alpha-\beta i)x} Q_1(x)$ sera une intégrale particulière de la 2e, Q_1 étant le polynôme conjugué de Q (par le changement de $+i$ en $-i$.)

L'intégrale de l'éq. proposée sera : $e^{(\alpha+\beta i)x} Q(x) + e^{(\alpha-\beta i)x} Q_1(x)$

qui peut se mettre sous la forme : $e^{\alpha x}\cos\beta x\, R(x) + e^{\alpha x}\sin\beta x\, R_1(x)$

le polynôme R provenant de la réunion des termes réels de Q et Q_1, et le polynôme R_1 de la réunion des termes imaginaires.

Il en serait de même si on avait : $B = e^{\alpha x}\sin\beta x . P_1(x)$

Conclusion : Dans le cas où : $B = e^{\alpha x}\cos\beta x\, P(x) + e^{\alpha x}\sin\beta x\, P_1(x)$

on cherche une intégrale particulière de la forme :

$$e^{\alpha x}\cos\beta x\, R(x) + e^{\alpha x}\sin\beta x\, R_1(x)$$

où R et R_1 sont 2 polynômes de degré $(p+K)$, p étant le degré le plus élevé des 2 polynômes P et P_1, et K l'ordre de multiplicité de la racine $(\alpha+\beta i)$ dans l'équation caractéristique.

Comme précédemment, on pourra négliger dans R, R_1 les termes de degré inférieur à K_1 qui figurent dans l'intégrale générale de l'éq. sans 2e membre.

Type se ramenant à l'équation linéaire à coefficients constants :

$$A_0(az+b)^m \frac{d^m y}{dz^m} + A_1(az+b)\frac{d^{m-1}y}{dz^{m-1}} + \ldots\ldots + A_{m-1}(az+b)\frac{dy}{dz} + A_m y = 0$$

On fait d'abord le changement de variable : $az+b = x$

$$A_0 x^m \frac{d^m y}{dx^m} + A_1 x^{m-1}\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \ldots\ldots + A_{m-1}\, x\frac{dy}{dx} + A_m y = 0$$

Ce nouveau type se transforme à son tour en posant : $x = e^z$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dz} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{1}{x^2}\frac{dy}{dz} \qquad \ldots\ldots$$

En général, $\frac{d^k y}{dx^k}$ est égale à une fonction linéaire de y et de ses dérivées par rapport à z, divisée par x^k. En faisant la substitution, on obtient une équation linéaire à coefficients constants.

On peut se dispenser d'effectuer cette transformation, et traiter directement l'équation. — Dans l'équation transformée, on doit chercher des intégrales de la forme : e^{rz}, c.à.d. en remontant à l'ancienne variable x, de la forme : x^r. En substituant directement, on trouve : $f\left(\frac{d}{dx}\right)x^r \equiv \left[A_m + A_{m-1}r + A_{m-2}r(r-1) + \ldots + A_0 r(r-1)\ldots(r-m+1)\right]x^m$

L'équation caractéristique en $\underline{r}$ est donc :

$$A_0 r(r-1)\ldots\ldots(r-m+1) + \ldots\ldots + A_{m-2}r(r-1) + A_{m-1}r + A_m = 0$$

Soit $\underline{r}$ une racine d'ordre K de cette équation. A cette racine correspond une intégrale de la forme : $e^{rz}\left[C_0 + C_1 z + \ldots\ldots + C_{K-1}z^{K-1}\right]$

c.à.d. en revenant à la variable x :

$$x^r\left[C_0 + C_1 Lx + C_2(Lx)^2 + \ldots\ldots + C_{K-1}(Lx)^{K-1}\right]$$

Conclusion : On forme l'éq. caractéristique comme ci-dessus, et on la résout ; l'intégrale générale de l'éq. homogène sera de la forme :

$$\sum x^r\left[C_0 + C_1 Lx + C_2(Lx)^2 + \ldots\ldots + C_{K-1}(Lx)^{K-1}\right]$$

somme étendue à toutes les racines r de cette éq. caractéristique, K désignant le degré de multiplicité de chacune d'elles.

Dans le cas particulier où l'éq. caractéristique a toutes ses racines distinctes, l'intégrale générale se réduit à un polynôme (qui n'est pas nécessairement entier ni rationnel.)

– Pour trouver une intégrale particulière de l'équation avec 2e membre, on emploie en général la méthode de variation des constantes arbitraires. Nous avons vu que si l'éq. à coefficients constants a un 2e membre de la forme: $e^{az}P(z)$ elle admet une intégrale particulière de la forme: $e^{az}Q(z)$. Rétablissant la variable x, on voit que si le 2e membre est de la forme: $x^a P(Lx)$ l'éq. aura une intégrale de la forme: $x^a Q(Lx)$
Q étant un polynôme de degré $(p+K)$, p désignant le degré de P, K l'ordre de multiplicité de la racine a dans l'éq. caractéristique.
Cela est encore vrai quand la racine a est imaginaire.

Equation aux dérivées partielles du 1er ordre linéaire.

Soit une fonction inconnue z des 2 variables indépendantes x, y;
soit l'éq: $Pp + Qq = R$ (1) où: $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$
et où P, Q, R sont des fonctions données de x, y, z.

On va prouver que pour avoir l'intégrale générale de l'équation (1) il suffit de trouver l'intégrale générale du système de 2 éq. différentielles du 1er ordre:

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} \qquad (2)$$

Soit en effet: $U(x,y,z) = C^{te}$ $\quad V(x,y,z) = C^{te}$ (3)
l'intégrale générale de ce système (2.) On aura, pour toutes les valeurs de x, y, z, dx, dy, dz qui satisfont le système (2):

$$\frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz = 0 \qquad \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz = 0$$

ou: $$P\frac{\partial U}{\partial x} + Q\frac{\partial U}{\partial y} + R\frac{\partial U}{\partial z} = 0 \quad (4) \qquad P\frac{\partial V}{\partial x} + Q\frac{\partial V}{\partial y} + R\frac{\partial V}{\partial z} = 0 \quad (5)$$

Soit d'autre part: $f(x,y,z) = 0$
une équation définissant z en fonction de x et de y, et telle que cette fonction z soit une intégrale de l'équation (1)
On aura, en y substituant cette même fonction z et prenant les dérivées partielles,

$$\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z} = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

On peut tirer p et q de ces équations et porter dans l'éq. (1) qui est vérifiée ~~identiquement~~ par hypothèse; on trouve:

$$P\frac{\partial f}{\partial x} + Q\frac{\partial f}{\partial y} + R\frac{\partial f}{\partial z} = 0 \qquad (6)$$

(Remarque: si l'on avait $f(x,y,z) = C^{te}$, p et q seraient les

mêmes, mais P, Q, R, où l'on substitue z fonction de x et de y ne seraient pas les mêmes en général, de sorte que si l'on peut ~~partir d'une ég~~ se donner une intégrale générale de la forme $f(x, y, z) = C^{te}$ pour aboutir à (6), la réciproque n'est pas vraie, et l'on ne peut prendre pour intégrale générale $f(x, y, z)$ égalée à une constante.)

En rapprochant (4), (5), (6), on conclut que le déterminant :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} & \frac{\partial U}{\partial z} \\ \frac{\partial V}{\partial x} & \frac{\partial V}{\partial y} & \frac{\partial V}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix}$$

est identiquement nul,

c.à.d. qu'il existe une relation entre U, V et f, ou que f est une fonction de U et de V.

Ainsi toute intégrale de l'éq. (1) est de la forme $F(U, V) = 0$, et réciproquement, on obtient une intégrale de l'éq. (1) en égalant à 0 une fonction quelconque de U et de V.

Le raisonnement précédent suppose que P, Q, R ne s'annulent pas à la fois. Il n'y a d'exception que si une certaine fonction z annule en même temps P, Q, R. Or si P, Q, R s'annulaient à la fois pour des valeurs de x, y, z liées par une relation

$$\varphi(x, y, z) = 0$$

P, Q, R seraient divisibles par $\varphi(x, y, z)$, et l'éq. (1) contiendrait en facteur $\varphi(x, y, z)$. L'équation : $\varphi(x, y, z) = 0$ n'est pas une intégrale proprement dite, quoique l'éq. (1) soit vérifiée quand celle-ci l'est : c'est une <u>intégrale singulière</u>

Signification géométrique du système (2).

L'intégrale générale (3) de ce système est une famille de courbes dépendant de 2 constantes C, C'.

D'après le théorème précédent, on obtient une intégrale quelconque de l'éq. (1) en prenant :
$$F(U,V)=0$$
Cela revient à dire, géométriquement, que la surface intégrale est le lieu des courbes (3) qui sont liées par la relation :
$$F(C,C')=0$$
Plus généralement, on peut dire que toute surface intégrale est un lieu de courbes (3) et, inversement, que tout lieu de courbes (3) est une surface intégrale vérifiant l'éq. (1).

Les courbes (3) sont dites les caractéristiques de cette surface ; le système (2) est le système différentiel des caractéristiques.

Cette définition géométrique des surfaces intégrales donne la solution de quelques problèmes.

I. Trouver une surface intégrale passant par une courbe donnée C. On distinguera 2 cas :

1er cas — La courbe C n'est pas une caractéristique

Soit S la surface cherchée ; c'est un lieu de caractéristiques. Toute caractéristique Γ tracée sur S devra rencontrer C. Donc la surface cherchée S est le lieu des caractéristiques qui rencontrent C

— Voici comment on opère. Soient :
$$U=\alpha \qquad V=\beta \qquad (7)$$
les équations d'une caractéristique Γ, et soient :
$$f(x,y,z)=0 \qquad \varphi(x,y,z)=0 \qquad (8)$$

les équations de la courbe donnée C. Il faut trouver la condition que doivent vérifier α et β pour que la courbe Γ rencontre la courbe C. Pour cela il faut et il suffit que les 4 équations (7) et (8) aient une solution commune en x, y, z. Il n'y a qu'à éliminer x, y, z entre ces 4 équations, et l'on trouve l'éq. de condition :

$$F(\alpha, \beta) = 0 \qquad (9)$$

On est ainsi ramené à trouver le lieu des caractéristiques (7) liées par la relation (9) — Ce lieu a pour équation :

$$F(U, V) = 0$$

2e cas — La courbe C est une caractéristique

Il suffit de trouver une famille de caractéristiques contenant C; il y a une infinité de solutions. Si α_0, β_0 sont les paramètres de la courbe C, une relation arbitraire entre α et β, telle seulement que pour : $\alpha = \alpha_0$ on ait : $\beta = \beta_0$ fournira une solution

II. Trouver une surface intégrale tangente à une surface donnée Σ le long d'une courbe.

Soit C la courbe de contact (inconnue) de la surface Σ avec l'intégrale S. Soit M un point de C; par M il passe une caractéristique contenue dans S, et par suite tangente à la surface Σ en M. Donc, pour trouver la surface S, il suffit de chercher le lieu des caractéristiques tangentes à la surface Σ, ou plutôt le lieu de leurs points de contact, qui est la courbe C.

Voici comment on opère pour trouver les équations de la cbe C

Soit : $$f(x, y, z) = 0 \qquad (10)$$

l'équation de la surface donnée Σ. Écrivons qu'en un point (x, y, z) commun à la surface Σ et à la ~~courbe~~ caractéristique Γ (éq. 7) la courbe est tangente à la surface, c.à.d. que le déplacement (dx, dy, dz) sur Γ est dans le plan tangent à Σ. Or, dx, dy, dz vérifient par hypothèse les équations :

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} \qquad (2)$$

D'autre part, pour tout déplacement sur la surface on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0$$

Donc, pour que le déplacement sur Γ soit aussi sur la surface Σ, il faut qu'on ait :

$$P\frac{\partial f}{\partial x} + Q\frac{\partial f}{\partial y} + R\frac{\partial f}{\partial z} = 0 \qquad (6)$$

On voit que, pour qu'en un point (x, y, z) commun à la courbe Γ et à la surface Σ, la courbe soit tangente à la surface, il faut que ce point vérifie l'équation (6) ; or, comme il vérifie aussi par hypothèse l'éq. (10), la courbe C est l'intersection des surfaces (10) et (11). Par suite, on obtiendra l'intégrale cherchée en déterminant (par le probl. I) les caractéristiques qui rencontrent cette courbe C.

Remarque. Il y a exception dans le cas où Σ serait une intégrale singulière ; l'éq. (6) serait alors vérifiée identiquement ; mais alors la surface donnée Σ serait l'intégrale cherchée.

Trajectoires et surfaces orthogonales.

Considérons une famille de surfaces dépendant d'un paramètre λ:

$$f(x, y, z, \lambda) = 0 \qquad (1)$$

Il existe une famille de courbes dépendant de 2 paramètres et telles qu'en chacun de leurs points d'intersection avec une des surfaces (1) elles les rencontrent orthogonalement.

En effet, soit (x, y, z) le point d'intersection d'une de ces courbes et d'une des surfaces (1); (dx, dy, dz) un déplacement infiniment petit sur la courbe à partir de ce point, ~~défini par~~ la condition d'orthogonalité est:

$$\frac{dx}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{dy}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{dz}{\frac{\partial f}{\partial z}} \qquad (2)$$

Puisque le p. (x, y, z) est sur une surface (1), le paramètre λ doit avoir dans le système (2) une valeur ~~telle~~ qui vérifie l'éq. (1). En éliminant λ entre (1) et (2), c.à.d. en portant dans le système (2) la valeur de λ tirée de l'éq. (1), on aura un système différentiel de la forme: $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$

Son intégrale générale sera de la forme:

$$U(x, y, z) = \alpha \qquad V(x, y, z) = \beta \qquad (3)$$

Telle est la famille de courbes qui répond à la question.

D'autre part, il existe une infinité de surfaces dont l'équation générale dépend d'une fonction arbitraire, et telles que chacune d'elles soit orthogonale à une surface quelconque de la famille (1) en chacun de ses points d'intersection avec celle-ci

En effet, soit (x, y, z) un point d'une des surfaces (1); soient $p, q, -1$, les paramètres directeurs de la normale à la surface orthogonale en ce point; la condition d'orthogonalité sera:
$$p\frac{\delta f}{\delta x} + q\frac{\delta f}{\delta y} = \frac{\delta f}{\delta z} \qquad (4)$$
En intégrant cette équation aux dérivées partielles, on obtient une famille de surfaces dépendant d'un paramètre et répondant à la question.

Remarquons que pour trouver ces surfaces on est ramené à intégrer le système (2), ce qui prouve que les caractéristiques des surfaces orthogonales sont les trajectoires orthogonales de la famille de surfaces (1).

Signification géométrique de l'équation aux dérivées partielles.

Considérons l'éq.:
$$Pp + Qq = R \qquad (1)$$
Soit (x, y, z) un point M de l'espace; S une surface intégrale passant par ce point. L'équation du plan tangent à la surface S au point M est:
$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y)$$
L'éq. (1) montre que si l'on considère la droite D qui a pour équations:
$$\frac{X-x}{P} = \frac{Y-y}{Q} = \frac{Z-z}{R}$$
Cette droite est située dans le plan tangent à la surface en M.

Or, en chaque point M de l'espace P, Q, R prennent des valeurs bien déterminées. Par suite le problème de l'intégration revient au suivant:

A chaque point M de l'espace on fait correspondre une droite D passant par ce point (ses ~~cosinus~~ paramètres directeurs étant P, Q, R). On demande ~~quelles sont~~ de trouver les surfaces telles qu'en chacun de leurs points elles soient tangentes à la droite D correspondante.

On voit que si l'on considère l'ensemble des surfaces S qui passent par un point M de l'espace, tous leurs plans tangents en ce point passent par la droite D correspondante. Ainsi la condition nécessaire et suffisante pour qu'une infinité de surfaces soient les intégrales de l'éq. (1), est que l'enveloppe des plans tangents aux surfaces qui passent par un point quelconque de l'espace soit une droite (passant par ce point.)

On peut donc savoir d'avance, par cette considération géométrique si l'équation aux dérivées partielles d'une famille de surfaces sera linéaire ou non. — L'enveloppe des plans tangents en M peut se composer de n droites : alors l'équation aux dérivées partielles des surfaces sera le produit de n équations linéaires.

Les caractéristiques sont les courbes tracées sur les surfaces intégrales, telles qu'en chacun de leurs points elles soient tangentes à la droite D correspondante. Donc, si l'on peut trouver géométriquement une infinité de courbes dépendant de 2 paramètres et tangentes en chacun de leurs points à la droite D correspondante on aura les caractéristiques, et le problème d'intégration sera résolu sans calcul.



